5

LA MECCANICA NEWTONIANA

> “ Mechanicam *vero duplicem Veteres constituerunt:* Rationalem *quæ per Demonstrationes accurate procedit,* & Practicam. *Ad practicam spectant Artes omnes Manuales, a quibus utique* Mechanica *nomen mutuata est. Cum autem Artifices parum accurate operari soleant, fit ut* Mechanica *omnis a* Geometria *ita distinguatur, ut quicquid accuratum sit ad* Geometriam *referatur, quicquid minus accuratum ad* Mechanicam. *Attamen errores non sunt Artis sed Artificum. Qui minus accurate operatur, imperfectior est Mechanicus, & si quis accuratissime operari posset, hic foret Mechanicus omnium perfectissimus. Nam & Linearum rectarum & Circulorum descriptiones in quibus* Geometria *fundatur, ad* Mechanicam *pertinent. Has lineas describere* Geometria *non docet sed postulat.*
>
> . . . .
>
> *Rectas & circulos describere Problemata sunt sed non Geometrica. Ex* Mechanica *postulatur horum solutio, in* Geometria *docetur solutorum usus.* ”

Così[1] Newton si esprime nella *præfatio ad lectorem* dei Principia[40], e vi stabilisce il campo d’azione della Meccanica Razionale.

[1] Gli antichi svilupparono la Meccanica in due forme: *Razionale*, che procede con rigore mediante dimostrazioni, e *Pratica*. Alla pratica appartengono tutte le Arti Manuali, dalle quali lo stesso nome *Meccanica* è stato mutuato. Ma poiché gli artefici hanno l’abitudine di operare in modo approssimativo, così accade che si faccia distinzione tra *Meccanica* e *Geometria*, attribuendo alla *Geometria* tutto ciò che è rigoroso ed alla *Meccanica* ciò che lo è in misura minore. Responsabile dell’errore però non è l’Arte, ma gli Artefici. Chi opera con poca precisione è Meccanico imperfetto, e chi riuscisse ad operare in modo accuratissimo sarebbe il più perfetto dei Meccanici. Infatti il tracciamento delle linee rette e dei cerchi su cui si fonda la *Geometria* è compito della *Meccanica*. La *Geometria* non insegna a tracciare queste linee: ne assume l’esistenza. (. . .)
Il tracciamento di rette e cerchi è un problema, ma non geometrico. La soluzione di questo problema è compito della *Meccanica*; in *Geometria* si insegna a far uso delle soluzioni.

L'opera di Newton è ormai universalmente accettata come punto di partenza dello sviluppo moderno della Meccanica in quanto enunciando le leggi della dinamica completa l'opera dei suoi predecessori, con Galileo in prima fila, ed apre la strada a tutti gli studi successivi. Per questo premettiamo alla discussione in termini moderni un paragrafo di carattere storico, in cui ripercorriamo brevemente gli enuencitai principali di Newton.

Il resto del capitolo è dedicato ad una discussione generale sulla meccanica, intesa come studio del movimento dei corpi. A fondamento della nostra discussione porremo le seguenti ipotesi.

(i) Ad un corpo viene attribuita come caratteristica intrinseca una *massa*, di cui non si indaga la natura.

(ii) Esiste una classe privilegiata di riferimenti, detti inerziali, equivalenti dal punto di vista dinamico nel senso che non possibile decidere mediante esperienze meccaniche in quale di questi riferimenti ci si trovi.

(iii) Nei riferimenti inerziali vale la legge fondamentale della dinamica $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, da intendersi come equazione differenziale, ed i movimenti possibili sono tutti e soli quelli descritti dalle soluzioni di questa equazione.

(iv) Nei riferimenti inerziali vale il principio di azione e reazione.

Il significato di queste ipotesi è probabilmente noto al lettore che abia una conoscenza minima della Fisica. Nella breve introduzione storica sui *Principia* c'è una discussione abbastanza dettagliata sul concetto di massa e sui principi della Meccanica così come sono presentati da Newton. Confidiamo che la lettura di quel paragrafo e del resto del capitolo renderà via via più chiaro il senso delle ipotesi.

In questa parte delle note ci occuperemo delle equazioni cardinali per sistemi di punti materiali e delle leggi di conservazione che ne derivano. Dedicheremo poi lo spazio dovuto alla caratterizzazione dei sistemi conservativi ed alla conservazione dell'energia. Infine discuteremo il problema del moto relativo inquadrando e richiamando le esperienze principali che hanno permesso di confermare il moto di rotazione della Terra.

Nei testi tradizionali di Meccanica è consuetudine arricchire la trattazione della Meccanica newtoniana con altri argomenti che fanno parte (e costituiscono la motivazione principale) dei *Principia*, in particolare il moto in un campo centrale che pone la base su cui si fonda lo studio dei moti planetari. In queste note rimandiamo la discussione di questo ed altri modelli al capitolo sulle applicazioni del formalismo di Lagrange.

5.1 Breve nota storica

Ricostruire lo sviluppo storico della Meccanica è impresa che va ben al di là dei limiti di queste note. In questo paragrafo ci limitiamo a prendere come punto di partenza i *Principia* di Newton richiamando brevemente le definizioni di massa, quantità di moto, inerzia e forza. Aggiungeremo poi qualche considerazione sui concetti di spazio e tempo assoluto e gli enunciati delle tre leggi fondamentali.

Per ovvie ragioni di spazio e tempo, ometteremo di discutere lo sviluppo della Meccanica antecedente a Newton, alla quale egli fa costante riferimento appoggiandosi in particolare all'opera di Galileo.

Tralasceremo anche la discussione sulle leggi di composizione di forze e movimenti, pur accuratamente analizzate sia nei *Principia* che nei *Discorsi e dimostrationi matematiche intorno a due nuove scienze* di Galileo. Ci limitiamo a ricordare che forze e spostamenti si compongono secondo le regole del calcolo vettoriale.[2]

5.1.1 Alcune definizioni

Il trattato di Newton si apre con una serie di otto definizioni. Riportiamo le prime quattro, tralasciando per brevità (e ribadendo che queste note non hanno come scopo una ricostruzione storica che richiederebbe ben altro spazio ed attenzione) quelle che riguardano la forza centripeta.

I. La *massa* come quantità di materia.[3]
   " *Quantitas Materiæ est mensura ejusdem orta ex illius Densitate & Magnitudine conjunctim.* "

Poco sotto Newton aggiunge: *"Hanc autem quantitatem sub nomine corporis vel Massæ in sequentibus passis intelligo"*.[4] Questa definizione può lasciarci alquanto perplessi, perché non è del tutto evidente cosa si debba intendere per "magnitudine", che qui abbiamo tradotto con "grandezza". Verrebbe spontaneo interpretarlo come "volume", ma in tutti i libri di fisica troviamo la definizione di densità come rapporto tra la massa ed il volume: si tratterebbe di un circolo vizioso plateale, ed è ben difficile immaginare che Newton vi sia caduto. Né si può far riferimento ai predecessori di Newton, perché prima dei Principia non si trova tale concetto espresso in modo chiaro.

L'interpretazione dipende da cosa realmente si debba intendere per "densitas" e "magnitudo". Sembra ragionevole ritenere che Newton, esperto alchimista oltre che grandissimo matematico e fisico, pensasse alla materia come composta di corpuscoli elementari, analoghi agli atomi di Democrito, ciascuno dei quali identifica una ben particolare sostanza ed è caratterizzato da una massa propria. In tal senso la massa sarebbe un concetto primitivo che esprime una proprietà intrinseca egli atomi. La densità invece verrebbe piuttosto associata alle variazioni di volume che si presentano nei fenomeni di evaporazione e condensazione, che secondo Newton dipendono solo dall'allontanamento o avvicinamento dei corpuscoli, con l'interposizione di uno spazio vuoto o riempito da qualcosa di non meglio definito che comunque non modifica la densità propria dei corpuscoli e non ha influenza sulla massa. Dunque il cambiamento di stato non comporta un cambiamento del numero di atomi, ma solo del volume che

---

[2] O forse sarebbe meglio dire che il calcolo vettoriale è stato sviluppato proprio per descrivere la composizione dei movimenti e delle forze.

[3] La quantità di materia è rappresentata dalla sua misura, risultante dal prodotto della densità per la grandezza.

[4] Nel seguito chiamerò *corpo* o *massa* questa quantità.

cambia in ragione dello spazio che si è creato tra essi, o è scomparso. Se si accetta tale interpretazione allora si può ben assegnare al termine "magnitudo" il significato di "volume", ma la "densitas" verrebbe ad assumere il ruolo di concetto derivato, esprimente in qualche modo la conservazione del numero di atomi al variare del volume. In questa visione la massa viene ad assumere effettivamente il significato di quantità di materia contenuta in un corpo, intesa come proprietà che permane anche durante i cambiamenti di stato quali, appunto, liquefazione, evaporazione, condensazione &c.[5] Fondamentale invece è la proporzionalità tra massa e peso, che Newton afferma di aver verificato con esperimenti accuratissimi: la misura della massa viene ricondotta da un confronto di pesi.

II. La *quantità di moto* come misura del movimento.[6]
   " *Quantitas motus est mensura ejusdem orta ex Velocitate et quantitate Materiæ conjunctim.* "

III. L'*inerzia* come proprietà insita nella materia.[7]
   " *Materiæ vis insita est potentia resistendi, qua corpus unumquodque, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.* "

Si noti che in questa definizione non appare alcun legame con la massa, definita in precedenza. Tuttavia Newton stesso aggiunge alcuni commenti meritevoli di attenzione. Anzitutto sottolinea il fatto sperimentale che la *forza insita* nella materia è sempre proporzionale alla massa. Poi osserva che in apparenza si può distinguere tra *inerzia*, intesa come la resistenza che un corpo in quiete manifesta quando lo si voglia mettere in movimento, ed *impeto*, inteso come l'azione esercitata da un corpo in movimento su un ostacolo che cerchi di fermarlo. Ma, sottolinea Newton,[8]

" *Vulgus Resistentiam quiescentibus et Impetum moventibus tribuit; sed motus et quies, uti vulgo concipiuntur, respectu solo distinguuntur ab invicem, neque semper vere quiescunt quæ vulgo tanquam quiescentia spectantur.* "

Noi diremmo: lo stato di moto e di quiete sono relativi all'osservatore. A questo pro-

---

[5] Con una piccola forzatura, possiamo cercare di comprendere il pensiero di Newton alla luce delle conoscenze sviluppate molto tempo dopo. Pensiamo ad esempio alla legge di Avogadro, secondo la quale volumi eguali di un gas in identiche condizioni di pressione contengono lo stesso numero di molecole. Dai commenti di Newton alla definizione di Massa sembra ragionevole inferire che egli si riferisse ad una proprietà di questo genere per i corpi solidi, chiara nella sua mente pur senza essere esplicitamente enunciata.

[6] La quantità di moto è rappresentata dalla sua misura, ottenuta moltiplicando la velocità e la quantità di materia.

[7] La forza insita nella materia è la capacità di resistere per cui qualunque corpo, per sua natura, persevera nel suo stato di quiete o di moto uniforme in linea retta.

[8] La gente attribuisce la resistenza ai corpi in quiete e l'impeto a quelli in movimento, ma il moto e la quiete, come vengono comunemente concepiti, vengono distinti l'uno dall'altro solo tramite l'osservazione, e non sempre sono realmente in quiete quegli oggetti che alla gente sembrano tali.

posito si veda il brano di Galileo del *gran navilio*, a cui Newton implicitamente si riferisce nel suo trattato, e che riportiamo più avanti, nel paragrafo 5.4.5.

IV. La *forza* come azione esercitata su un corpo.[9]

> " *Vis impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.* "

Newton precisa che *"Consistit hæc vis in actione sola, neque post actionem permanet in corpore* ".[10] Ed aggiunge che l'origine della forza può essere molteplice: per urto, per pressione, o come forza centripeta.

Nelle quattro definizioni successive Newton definisce la forza centripeta. Qui egli assimila l'azione di un centro di forze a quella della mano che trattiene la fionda mentre questa ruota. Sembra ragionevole interpretare l'argomento nel senso seguente: la fionda in rotazione viene trattenuta dalla mano, e questa è una forza che si avverte sensibilmente e che in qualche modo si potrebbe misurare ad esempio interponendo un dinamometro tra la mano e la corda; compito della forza è trattenere il corpo su una traiettoria circolare, mentre per sua natura esso proseguirebbe il movimento in linea retta. In modo analogo la curvatura della traiettoria di un corpo attirato da un magnete o sottoposto alla gravità deve attribuirsi ad una forza non misurabile con un dinamometro, ma non per questo meno reale e di natura diversa dalla precedente.[11] Qui si attua l'estensione del concetto di forza da una situazione *statica*, quale la misura di un peso o dello sforzo necessario per smuovere un corpo fermo, ad una situazione *dinamica* quale quella dell'azione gravitazionale, mediata dall'esempio della fionda, in cui non si osserva direttamente la forza, ma solo la variazione del movimento da essa causata.

5.1.2 Lo spazio ed il tempo assoluti

Nello scholium che segue le definizioni Newton si occupa dei concetti comuni di tempo e spazio. Così inizia la sua discussione.[12]

---

[9] La forza impressa è l'azione esercitata su un corpo intesa a mutare il suo stato di quiete o di moto uniforme in linea retta.

[10] Questa forza consiste nella sola azione, e finita l'azione non permane nel corpo

[11] Verrebbe spontaneo dire: poichè osservo che una forza produce un'accelerazione, allora se osservo un'accelerazione ammetto che esista una forza. Ma qui faremmo un uso ingenuo di un assioma che non abbiamo ancora enunciato.

[12] I. Il tempo assoluto, vero e matematico, considerato in sé stesso e nella sua propria natura senza alcuna relazione con alcunché di estrinseco, scorre uniformemente, e con altro nome viene chiamato *durata*; quello relativo, apparente e volgare è la misura della durata sensibile ed accidentale, rilevata tramite il movimento (sia essa accurata oppure ineguale), di cui la gente si serve in vece del tempo vero; tali sono l'ora, il giorno, l'anno. II. Lo spazio assoluto considerato in sé stesso e nella sua propria natura senza alcuna relazione con alcunché di estrinseco, resta sempre immobile ed immutabile; quello relativo è una qualsiasi misura e dimensione dello spazio assoluto rilevata dai nostri sensi mediante la sua relazione con i corpi, e che viene volgarmente percepito come spazio

> " *I. Tempus absolutum verum & Mathematicum, in se & natura sua absque relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, alioque nomine dicitur Duratio; relativum apparens & vulgare est sensibilis & externa quævis Durationis per motum mensura, (seu accurata seu inæquabilis) qua vulgus vice veri temporis utitur; ut Hora, Dies, Mensis, Annus.*
> *II. Spatium absolutum natura sua absque relatione ad externum quodvis semper manet similare & immobile; relativum est spatii hujus mensura seu dimensio quælibet mobilis, quæ a sensibus nostris per situm suum ad corpora definitur, & a vulgo pro spatio immobili usurpatur: uti dimensio spatii subterranei, aerei vel cælestis definita per situm suum ad Terram. Idem sunt spatium absolutum & relativum, specie & magnitudine, sed non permanent idem semper numero. Nam si Terra, verbi gratia, movetur, spatium Aeris nostri quod relative & respectu Terræ semper manet idem, nunc erit una pars spatii absoluti in quam Aer transit, nunc alia pars ejus, & sic absolute mutabitur perpetuo.* "

Dunque Newton sembra sottintendere che le nostre misure temporali o spaziali siano delle approssimazioni della misura di entità ideali ed astratte di cui si postula l'esistenza, ma che sfuggono ai nostri sensi.

Possiamo cercare di intepretare il pensiero di Newton riferendoci alle conoscenze astronomiche del tempo. Il quadro tracciato dai predecessori di Newton, inclusi Copernico, Galileo e Keplero per menzionare solo i più recenti, vedeva il sistema costituito dal sole e dai pianeti muoversi sullo sfondo delle *stelle fisse*. In particolare, Copernico aveva ripreso l'ipotesi eliocentrica come geometricamente piu comoda e plausibile. Il fatto che le stelle non siano soggette ad alcun movimento, almeno a quanto appariva agli osservatori del tempo, suggerisce che possa effettivamente esistere uno spazio privilegiato, che resta però inaccessibile alle nostre osservazioni. L'ipotesi dello spazio assoluto, oltre ad adattarsi perfettamente alla visione del mondo che abbiamo descritto, costituisce un ottimo strumento geometrico, in particolare se corredato dalla geometria euclidea, per lo sviluppo della Meccanica. Lo spazio "volgare" a cui Newton si riferisce è quello delle relazioni tra oggetti, che di fatto sono l'unica osservazione accessibile alle nostre misure.[13] Così, nell'eseguire un esperimento di meccanica nei

---

immobile: così la dimensione di uno spazio terreno, aereo o celeste viene definita mediante la sua collocazione rispetto alla Terra. Lo spazio assoluto e quello relativo sono la stessa cosa se si guarda all'apparenza ed alla grandezza, ma non sempre sono uguali se si considera la misura. Infatti se, per fare un esempio, la Terra si muove, il nostro spazio aereo che rispetto alla Terra rimane sempre lo stesso occuperà ora una parte ora un'altra dello spazio assoluto in cui l'aria si muove, e quindi rispetto a quello spazio muterà continuamente.

[13] Queste osservazioni acquistano particolare rilievo se si tiene presente che Cartesio e Leibniz, ritenevano invece che le determinazioni spaziali avessero senso esclusivamente come descriventi relazioni fra oggetti, o idealmente punti, nel senso che possibile parlare della posizione di un punto solo relativamente ad un altro punto; e analogamente per il tempo, che ha senso solo come ente relativo.

nostri laboratori noi consideriamo il laboratorio stesso come fisso. Se invece consideriamo il moto di corpi celesti allora diventa spontaneo fare riferimento alle Terra, o al Sole, o alle stelle fisse. Più di questo non possiamo fare; anzi:[14]

> “ *Fieri etenim potest ut nullum revera quiescat corpus, ad quod loca motusque referantur.* ”

In modo analogo si può intepretare il tempo assoluto. La nostra misura del tempo, sottolinea Newton, è affidata alla ripetizione di fenomeni che ci appaiono come periodici ed uniformi: qui egli menziona esplicitamente l'*horologium oscillatorium* di Huygens, che peraltro nel 1673 aveva inventato il meccanismo di scappamento e costruito l'orologio a pendolo, ed il fenomeno periodico delle eclissi dei satelliti di Giove. Quest'ultimo fenomeno in particolare aveva messo in evidenza la *inæqualitas* (inteso nel significato etimologico di mancanza di uniformità) del tempo solare. È significativo il fatto che poco più avanti egli aggiunga:[15]

> “ *Tempus absolutum a relativo distinguitur in Astronomia per Æquationem Temporis vulgi. Inæquales enim sunt dies Naturales, qui vulgo tanquam æquales pro Mensura Temporis habentur. Hanc inæqualitatem corrigunt Astronomi ut ex veriore Tempore mensurent motus cælestes. Possibile est ut nullus sit motus æquabilis quo Tempus accurate mensuretur.* ”

Qui Newton si riferisce all'*equazione del tempo*, usata dagli astronomi appunto per stabilire le relazioni tra il tempo solare e quello uniforme comunemente accettato come la miglior approssimazione del tempo assoluto. Tale funzione era accuratamente tabulata, e le tavole facevano parte del corredo normale degli astronomi.

Come si vede, Newton pone particolare attenzione sulla distinzione tra*assoluto*, in quanto indipendente dalla nostra osservazione, e *relativo*, in quanto da noi osservato e misurato.

La discussione sul riferimento spaziale diventa particolarmente delicata nel momento in cui si pone il problema di stabilire sperimentalmente se un dato sistema di riferimento sia a riposo o in movimento rispetto all'ipotetico spazio assoluto. Qui si affronta il problema dei cosiddetti *sistemi inerziali*, tutti identici dal punto di vista delle esperienze meccaniche, e della possibilità di rivelare invece i moti di rotazione. È in questa parte che si parla del celebre esperimento del secchio d'acqua in rotazione. Omettiamo questa discussione, che formalizzeremo più avanti nel paragrafo 5.4 sul moto relativo.

---

[14] Può ben accadere infatti che in realtà non esista alcun corpo immobile, rispetto al quale noi possiamo determinare i luoghi ed il moto.

[15] In astronomia il tempo assoluto viene distinto da quello relativo mediante l'*equazione del tempo*. Infatti i giorni naturali, che comunemente vengono ritenuti uniformi ed usati per la misura del tempo, sono in realtà ineguali. Gli astronomi correggono questa ineguaglianza al fine di misurare il moto dei corpi celesti rispetto ad un tempo più vero. È possibile che non esista nessun moto uniforme mediante il quale si possa misurare accuratamente il tempo.

5.1.3 I principi della Meccanica

Veniamo ora agli *Axiomata sive leges motus* (Assiomi ovvero leggi del moto), ai quali si dà comunemente il nome di *Principi della Meccanica*. L'enunciato di Newton, che riportiamo, presenta qualche differenza rispetto alla formulazione che troviamo nei testi recenti di Fisica o Meccanica.

Lex I:[16]

> “ *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directu, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.* ”

Lex II:[17]

> “ *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.* ”

Lex III:[18]

> “ *Actioni contrariam semper et æqualem esse reactionem, sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales et in partes contrarias dirigi.* ”

Qui è d'obbligo aggiungere qualche commento.

Occupiamoci anzitutto della relazione tra le prime due leggi. Nei testi di Fisica o di Meccanica si trova comunemente la formulazione del *Principio fondamentale della dinamica* nella forma ben nota $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, a significare che il corpo subisce un'accelerazione nella direzione d'azione della forza (il che è implicito nella notazione vettoriale) pari all'intensità della forza divisa per la massa. Va da sé che la formulazione di Newton viene piegata a questa interpretazione, che può sembrare molto naturale. Ma in tal caso (e talvolta i testi non mancano di sottolinearlo) il primo principio sarebbe una diretta conseguenza del secondo, perché basterebbe porre $\mathbf{F} = 0$ per concludere che il punto si muove di moto uniforme.[19]

È difficile accettare che un matematico della statura di Newton possa aver optato per la separazione dei due assiomi ignorando, o addirittura senza accorgersi, che il secondo contiene il primo. Vi sono dunque due aspetti che meritano qualche considerazione: anzitutto comprendere perché Newton abbia voluto distinguere le due leggi; poi quale sia l'interpretazione corretta della seconda legge.

Una possibile interpretazione è che nella visione Newtoniana il secondo principio si riferisca solo al risultato di un'azione *istantanea* della forza, rinunciando così a leggere

---

[16] Ogni corpo persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, finché non è costretto a mutare tale stato da una forza che gli viene applicata.

[17] La variazione del movimento è proporzionale alla forza motrice applicata, e avviene lungo la stessa linea retta dell'azione della forza.

[18] L'azione è sempre eguale e contraria alla reazione, ovvero le azioni reciproche esercitate da due corpi sono sempre eguali e dirette in verso opposto.

[19] Nei *Principia* non compare nessuna formulazione equivalente al nostro $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Sembra invece lecito riformulare in tal modo il contenuto della Propositio 20 del trattato di Meccanica di Eulero [14].

nella sua formulazione l'espressione a parole di un'equazione differenziale.[20] Il Principio fondamentale delle dinamica nella forma attuale sarebbe quindi da intepretarsi come la combinazione dei primi due assiomi di Newton. La giustificazione di questo punto di vista richiede una breve discussione.

Occorre ricollegarsi al concetto di forza che abbiamo discusso poco sopra, alla fine del paragrafo 5.1.1. Può essere utile premettere che i contemporanei di Newton, ai quali egli si rivolgeva, erano verosimilmente ben disposti ad accettare l'potesi di un'azione impulsiva, quale quella che si esercita nell'urto tra due corpi,[21] ma erano certamente restii ad accettare l'ipotesi di un'*azione a distanza* quale la gravità, che costituisce la base stessa su cui si fonda il sistema del mondo descritto nei *Principia*.[22]

Nel caso, diciamo statico, in cui si mette in movimento un corpo fermo mediante un urto la misura della variazione del moto in ragione della forza può misurarsi direttamente: questo è quanto Newton asserisce di aver fatto ricorrendo all'urto tra pendoli. Nel caso dinamico si procede considerando appunto l'azione istantanea, con l'argomento seguente. Se un corpo è in moto uniforme posso sempre immaginare di pormi in un riferimento solidale col corpo stesso, sicché in questo riferimento esso mi appare come fisso. Se ora, per un breve istante, esercito sul corpo una forza mi riconduco alla situazione statica in cui cerco di muovere un corpo fermo, e quindi in linea di principio so misurare la variazione del movimento. Questa variazione *si somma alla quantità di moto posseduta in precedenza dal corpo, e finita l'azione il moto continua ad essere uniforme con la nuova velocità acquisita, conformemente alla Lex prima*:[23] qui sta l'affermazione cruciale che non può essere sperimentata direttamente, ma deve essere assunta come postulato.[24]

---

[20] È possibile che Newton pensasse ad un'equazione differenziale dal momento che egli stesso aveva posto le basi del calcolo differenziale (si veda il capitolo 1), ma nella stesura dei Principia aveva optato per il linguaggio allora più noto della geometria euclidea. Questo è quanto egli ci ha lasciato.

[21] A questo proposito giova osservare che le leggi dell'urto erano state oggetto di studio intenso da parte di Descartes, Wallis, Wren e Huygens, e Newton ne conosceva bene la teoria. Anzi, nello Scholium che segue il Corollario VI dopo gli enuneciati delle leggi del moto egli si dilunga nella descrizione degli esperimenti sull'urto compiuti da lui stesso, e ne fa uso per giustificare il principio di azione e reazione.

[22] Nella terza edizione dei *Principia*, pubblicata nel 1713, Newton aggiunge uno Scholium generale in cui precisa che l'attrazione gravitazionale è da considerarsi come un utile strumento matematico, ma non intende impegnarsi sulla natura di tale forza, anzi afferma categoricamente *"hypotheses non fingo"* (non azzardo ipotesi).

[23] Nel commento alla definizione di forza, che abbiamo riportato accanto alla definizione IV del paragrafo 5.1.1, Newton precisa appunto che la forza esercita un'azione, ma non permane nel corpo.

[24] Accettanto il rischio di cadere nella pendanteria, sottolineiamo che la seconda legge afferma che la forza produce accelerazione, ma non esclude il contrario, ossia che possa esserci accelerazione senza l'azione di una forza. Questa seconda possibilità viene esplicitamente esclusa dalla prima legge.

Da qui al considerare l'azione continua della forza il passo è breve: si considera l'azione continua della forza come l'accumulo di tanti piccoli urti: la seconda legge spiega come prevedere la variazione di quantità di moto dovuta a ciascun urto; la prima legge dice cosa accade nell'intervallo di tempo tra due urti successivi.[25]

In tal modo si possono sintetizzare le prime due leggi del moto nel principio fondamentale della dinamica $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, come noi facciamo praticamente in tutti i nostri trattati. Ciò che è spesso sottinteso e non detto esplicitamente nei testi è che *i movimenti possibili sono tutti e soli quelli descritti dalle soluzioni dell'equazione differenziale* $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. L'accento va posto su quel "tutti e soli": come abbiamo detto poco sopra, la seconda legge dice che ogni soluzione dell'equazione è un movimento possibile, e quindi contiene il "tutti"; la prima legge esclude esplicitamente che ve ne possano essere altri, e quindi contiene il "soli". Il secondo aggettivo non è implicito nel primo, sicché le due leggi devono considerarsi come indipendenti.

5.2 Problema a un corpo: teoremi generali

Il problema della Meccanica, come abbiamo detto all'inizio, è lo studio del movimento dei corpi. Come tale dovrebbe iniziare direttamente dallo studio dei sistemi costituiti da diversi corpi, ma la discussione, in cui entreremo più avanti, diventerebbe subito alquanto complessa. Per questo, seguendo l'impostazione tradizionale, iniziamo con lo studio del moto di un solo corpo nell'approssimazione del *punto materiale*. Si intende con questo un corpo le cui dimensioni siano molto piccole rispetto alle distanze considerate, e di cui possiamo ignorare la struttura ed i movimenti interni, sicché possiamo assimilarlo ad un punto nel senso della geometria, salvo assegnargli una massa. Rientra in tale categoria, ad esempio, lo studio del moto dei gravi (o dei proiettili, che nel bene e nel male ha rappresentato una parte consistente dello sviluppo della Meccanica), del pendolo (che ha un'importanza notevole sia ai fini della misura del tempo che per un'ampia serie di altri fenomeni quali l'urto o lo stesso problema del moto centrale) e quello dei moti planetari quando si consideri solo il moto di rivoluzione intorno al Sole.

Consideriamo dunque il moto di un punto materiale di massa m nello spazio. A tale scopo fissiamo un sistema di riferimento cartesiano, che sarà adattato volta per volta al sistema in esame, identificato da un'origine O e da una terna di versori (o

---

[25] Che questo sia esattamente il procedimento seguito da Newton risulta evidente dalla dimostrazione del Corollario I che segue immediatamente l'enunciato delle leggi, ed ancor più nella Proposizione I, Teorema 1 della sezione II. Il Corollario enuncia la legge di composizione delle forze, che si sommano secondo la regola del parallelogramma. La Proposizione altro non è che la legge delle aree, che noi traduciamo nella conservazione del momento della quantità di moto.

vettori di lunghezza unitaria) $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$, $\mathbf{u}_x$, sicché varranno le relazioni[26]

$$\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_z = 0 \ , \quad \|\mathbf{u}_x\| = \|\mathbf{u}_y\| = \|\mathbf{u}_z\| = 1 \ .$$

Identifichiamo la posizione del punto con un vettore $\mathbf{x}$, le cui componenti sugli assi del sistema saranno $x = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_x$, $y = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_y$ e $z = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_z$. Spesso, riprendendo le notazioni tradizionali dei testi di Meccanica Razionale, denoteremo la velocità $\dot{\mathbf{x}}$ con $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ e l'accelerazione $\ddot{\mathbf{x}}$ con $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

L'equazione $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$ fornisce un sistema di tre equazioni scalari, ottenute per proiezione sugli assi, ovvero motiplicando scalarmente ambo i membri per ciascuno dei versori $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$, $\mathbf{u}_z$. Precisamente si ha

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{y} &= F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{z} &= F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \ . \end{aligned}$$

Tali equazioni sono, come suol dirsi, accoppiate (cioè non possono essere risolte l'una indipendentemente dalle altre), ed in generale si applicano i teoremi di esistenza, unicità e regolarità delle soluzioni delle equazioni differenziali, ma ben poco si può dire sulla forma esplicita dei movimenti. Solo in casi eccezionali, tipicamente per problemi dotati di particolari simmetrie, si possono introdurre sistemi di coordinate, in qualche modo adattati alle simmetrie, che danno luogo a equazioni disaccoppiate. Esempi classici sono il moto nel campo di gravità locale (ad esempio in un laboratorio o comunque in prossimità di una regione ben limitata della superficie terrestre) ed il caso dei campi di forze centrali a simmetria sferica, per la cui discussione rimandiamo al capitolo 8.

5.2.1 Quantità di moto e momento della quantità di moto.

La *quantità di moto* di un punto materiale si definisce come

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \ . \tag{5.1}$$

Il *momento della quantità di moto* (o *momento angolare*) rispetto ad un punto Q (detto *polo*) identificato dal vettore $\mathbf{x}_Q$ si definisce come[27]

$$\mathbf{\Gamma}_Q = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_Q) \wedge \mathbf{p} \ . \tag{5.2}$$

Nel testo calcoleremo spesso il momento della quantità di moto rispetto all'origine O, e con un piccolo abuso di notazione scriveremo $\mathbf{\Gamma}$ anziché $\mathbf{\Gamma}_O$, come sarebbe corretto.

---

[26] Usiamo le consuete notazioni $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ per il prodotto scalare e $\|\mathbf{a}\|$ per la lunghezza euclidea di un vettore. Ricordiamo che in coordinate cartesiane ortogonali si ha $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ e $\|a\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$.

[27] Qui denotiamo con $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ il prodotto vettoriale tra i vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, ossia il vettore il cui modulo è l'area del parallelogrammo con lati $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, ortogonale al piano determinato dai vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ (e nullo se $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ sono paralleli) e orientato in modo che la terna $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ sia destrorsa. In altri testi si usa la notazione $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ oppure $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Esercizio 5.1: Verificare che tra i momenti della quantità di moto $\mathbf{\Gamma}_Q$ e $\mathbf{\Gamma}_{Q'}$ calcolati rispetto a due poli distinti Q e Q' sussiste la relazione

$$\mathbf{\Gamma}_{Q'} = \mathbf{\Gamma}_Q + (\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_{Q'}) \wedge \mathbf{p} \ .$$

Esercizio 5.2: Verificare che le componenti del momento angolare rispetto all'origine sono $\Gamma_x = m(y\dot{z} - z\dot{y})$, $\Gamma_y = m(z\dot{x} - x\dot{z})$ e $\Gamma_z = m(x\dot{y} - y\dot{x})$.

Si definisce infine il *momento della forza rispetto ad un polo Q* la quantità

$$\mathbf{N}_Q = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_Q) \wedge \mathbf{F} \ . \tag{5.3}$$

Proposizione 5.1: *Per ogni movimento $\mathbf{x}(t)$ soddisfacente l'equazione di Newton $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$, la quantità di moto e il momento della quantità di moto obbediscono alle equazioni*

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} \ , \qquad \dot{\mathbf{\Gamma}}_Q = \mathbf{N}_Q - v_Q \wedge \mathbf{p} \ , \tag{5.4}$$

dove $\mathbf{v}_Q = \dot{\mathbf{x}}_Q$ è la velocità del polo Q. In particolare, se Q è fisso, oppure $\mathbf{v}_Q$ e $\mathbf{v}$ sono paralleli, l'equazione del momento della quantità di moto assume la forma

$$\dot{\mathbf{\Gamma}}_Q = N_Q \ .$$

Dimostrazione. La prima equazione altro non è che una riscrittura dell'equazione di Newton, tenuto conto che la massa è assunta costante. Per ricavare la seconda, si deriva l'espressione (5.2) del momento della quantità di moto, e si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{\Gamma}}_Q &= (\mathbf{x} - \mathbf{x}_Q) \wedge m\mathbf{a} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_Q) \wedge m\mathbf{v} \\ &= (\mathbf{x} - \mathbf{x}_Q) \wedge \mathbf{F} - \mathbf{v}_Q \wedge \mathbf{p} \ , \end{aligned}$$

dove si tiene conto che $\mathbf{v} \wedge m\mathbf{v} = 0$ perché i due vettori sono paralleli. *Q.E.D.*

Dalla proposizione 5.1 seguono subito alcune *leggi di conservazione*. Precisamente, se la componente della forza in una direzione è nulla, si conserva (cioè resta costante durante l'evoluzione temporale, ovvero è una costante del moto nel senso discusso nel capitolo precedente) la componente della quantità di moto in quella direzione; analogamente, se si è scelto il polo Q fisso e la componente del momento della forza lungo una direzione è nulla, allora si conserva la componente del momento angolare nella stessa direzione. Un primo esempio è il caso del *punto materiale libero* (ossia con $\mathbf{F} = 0$): si conservano sia $\mathbf{p}$ che $\mathbf{\Gamma}_Q$ rispetto ad un qualunque polo fisso. Un secondo esempio è il campo di gravità locale: preso un riferimento cartesiano con l'asse $\mathbf{u}_z$ verticale la forza si scrive $\mathbf{F} = -mg\mathbf{u}_z$; si conservano due componenti della quantità di moto, p_x e p_y, ed una del momento della quantità di moto, Γ_z. Un altro caso notevole è quello delle forze centrali, che sarà discusso più avanti.

Esercizio 5.3: Mostrare che per un punto materiale soggetto ad una qualunque forza si possono trovare al più cinque costanti del moto indipendenti, più precisamente funzioni $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ definite nello spazio degli stati, i cui gradienti siano in ogni punto linearmente indipendenti.

(Suggerimento: per assegnati dati iniziali nello spazio degli stati, ogni costante del moto determina una superficie a cinque dimensioni, su cui deve giacere l'orbita, di dimensione uno).

Esercizio 5.4: Nel caso del punto non soggetto a forze abbiamo incontrato sei costanti del moto: le tre componenti della quantità di moto $\mathbf{p}$ e le tre componenti del momento angolare $\mathbf{\Gamma}$. Mostrare che ne esistono effettivamente cinque indipendenti; dedurne che il moto avviene su una retta.

Esercizio 5.5: Verificare che nel caso della forza peso $\mathbf{F} = -mg\mathbf{u}_z$ si hanno le cinque costanti del moto indipendenti

$$p_x \ , \quad p_y \ , \quad \Gamma_z \ , \quad \frac{p_z^2}{2m} + mgz \ , \quad p_y\Gamma_x - p_x\Gamma_y + \frac{m^2 g}{2}(x^2 + y^2) \ ;$$

dedurne che la traiettoria è una parabola giacente in un piano verticale.

5.2.2 Energia cinetica, potenza, lavoro elementare

L'*energia cinetica* T di un punto materiale, classicamente detta *vis viva*, è definita come[28]

$$T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 \tag{5.5}$$

Si definisce poi la potenza Π della forza $\mathbf{F}$ come

$$\Pi = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \ . \tag{5.6}$$

Proposizione 5.2: *Teorema dell'energia cinetica. Per ogni movimento $\mathbf{x}(t)$ soddisfacente l'equazione di Newton l'evoluzione temporale dell'energia cinetica obbedisce all'equazione*

$$\dot{T} = \Pi \ . \tag{5.7}$$

Dimostrazione. Si moltiplicano scalarmente per $\mathbf{v}$ ambo i membri dell'equazione di Newton, ottenendo $m\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$. Poi si fa uso dell'identità

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{\dot{T}}{m} \ .$$

Q.E.D.

Consideriamo ora il movimento $\mathbf{x}(t)$ tra i due istanti t_0 e t_1, e calcoliamo la variazione totale dell'energia cinetica. Abbiamo

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), t) \cdot \mathbf{v}\, dt \ .$$

Al secondo membro si dà il nome di *lavoro* della forza $\mathbf{F}$ lungo il movimento considerato.

---

[28] Con un piccolo abuso di notazione denotiamo $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$.

Il caso di forze puramente posizionali $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ è particolarmente interessante, ed in tal caso è significativo considerare la forma differenziale

$$\delta\mathscr{L} = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x} = F_x(x,y,z)\,dx + F_y(x,y,z)\,dy + F_z(x,y,z)\,dz \ , \tag{5.8}$$

detta *lavoro elementare*.[29]

5.2.3 Energia potenziale e teorema di conservazione dell'energia

Per molte delle forze considerate in fisica accade che la forma differenziale $\delta\mathscr{L}$ che definisce il lavoro elementare sia *esatta*,[30] ossia che esista una funzione $U(\mathbf{x})$ di cui essa sia il differenziale, tale dunque che

$$\delta\mathscr{L} = dU(\mathbf{x}) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \ .$$

Nei testi di fisica è piu comune considerare la funzione $V(\mathbf{x}) = -U(\mathbf{x})$, sicché il lavoro elementare si scrive

$$\delta\mathscr{L} = -dV = -\frac{\partial V}{\partial x}dx - \frac{\partial V}{\partial y}dy - \frac{\partial V}{\partial z}dz \ . \tag{5.9}$$

Alla quantità $V(\mathbf{x})$ si dà il nome di *energia potenziale*.[31] Per confronto con la forma

---

[29] Seguiamo qui la tradizione classica di caratterizzare una forma differenziale mediante il simbolo δ, che veniva usato per sottolineare il contrasto col differenziale di una funzione, indicato col simbolo d.

[30] Ricordiamo che in generale si possono dare condizioni necessarie e sufficienti perché una forma differenziale $\delta F = F_1(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1 + \ldots + F_n(x_1,\ldots,x_n)\,dx_n$ in n variabili sia esatta, o *chiusa*, ovvero sia il differenziale di una funzione $U(x_1,\ldots,x_n)$. Si considera tipicamente il caso in cui la forma sia definita in un aperto connesso $A \subset \mathbb{R}^n$, e sia regolare (i coefficienti F_i siano almeno classe C^1). Una condizione necessaria e sufficiente è che la *circuitazione* di F, cioè l'integrale di linea $\oint_\gamma (F_1\,dx_1 + \ldots + F_n\,dx_n)$ si annulli su ogni cammino γ chiuso (regolare a tratti) contenuto in A. In tal caso si ha anche che $\int_{P,\gamma}^{Q} (F_1\,dx_1 + \ldots + F_n\,dx_n)$ lungo un cammino γ che congiunge i punti P, Q dipende solo dagli estremi P, Q e non dal cammino scelto. Si ha poi una condizione *locale*, in generale necessaria ma non sufficiente: deve essere soddisfatta la *condizione di chiusura*

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k} - \frac{\partial F_k}{\partial x_j} = 0 \ , \quad \forall i,j \ .$$

Nel caso $n = 3$ si è soliti esprimere la condizione di chiusura nella forma $\operatorname{rot}\mathbf{F} = 0$, facendo uso dell'operatore *rotore* definito come

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y}\right)\mathbf{u}_x + \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\mathbf{u}_y + \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x}\right)\mathbf{u}_z \ .$$

La condizione di chiusura risulta essere sufficiente se si impongono condizioni più restrittive sull'aperto connesso A; ad esempio si richiede che A sia semplicmente connesso.

[31] Nei testi italiani, in in particolare in Levi–Civita e Amaldi, la funzione U viene detta *il potenziale*. Altri autori, ad esempio Arnold, denotano con U quello che qui viene

differenziale del lavoro elementare si vede allora che deve essere

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \ , \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \ , \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \ .$$

Queste ultime relazioni vengono spesso espresse in forma sintetica scrivendo

$$\mathbf{F} = -\,\mathrm{grad}\, V(\mathbf{x})$$

intendendo che l'operatore grad (detto *gradiente*) associ alla funzione $V(\mathbf{x})$ il vettore $\mathrm{grad}\, V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{u}_z$ le cui componenti nelle coordinate cartesiane sono le derivate parziali della funzione V.

Ricordando come è definita la potenza della forza, la condizione (5.9) può riscriversi in modo equivalente come

$$\Pi = -\dot{V} \ . \tag{5.10}$$

Basta infatti derivare l'energia potenziale rispetto al tempo, osservando che $-\dot{V} = -\,\mathrm{grad}\, V \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \Pi$.

Un campo di forze puramente posizionali $\mathbf{F}(x)$ si dice *conservativo* se ammette energia potenziale, ovvero verifica una delle condizioni (5.9) o (5.10). L'aggettivo è ben motivato dalla

Proposizione 5.3: *Teorema di conservazione dell'energia. Se il campo di forze è conservativo allora l'energia $E = T + V$ è una costante del moto.*

Dimostrazione. Basta far uso del teorema dell'energia cinetica e sostituirvi la condizione (5.10). Si ha $\dot{T} = \Pi = -\dot{V}$, da cui si ricava subito $\dot{T} + \dot{V} = \dot{E} = 0$. *Q.E.D.*

Discutiamo brevemente due esempi di sistemi conservativi di particolare interesse per la fisica.

Esempio 5.1: *Il campo gravitazionale locale* In un riferimento cartesiano con l'asse $\mathbf{u}_z$ verticale la forza si scrive $\mathbf{F} = -mg\mathbf{u}_z$, dove m è la massa del punto, e la potenza della forza diventa

$$\Pi = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -mg\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{v} = -mgv_z = -\frac{d}{dt}(mgz) \ .$$

Concludiamo che il campo di forze è conservativo, con energia potenziale $V = mgz$.

All'esempio semplice appena riportato ne aggiungiamo un secondo di importanza fondamentale per la fisica: il caso di un *campo di forza centrale a simmetria sferica.*

---

denotato con V. Infine, in molti testi di fisica il nome di potenziale viene riservato all'energia potenziale per unità di massa, nel caso di forze gravitazionali, o per unità di carica elettrica nel caso di forze elettrostatiche. La totale mancanza di uniformità obbliga a prestare attenzione alle convenzioni adottate da ciascun autore. In pratica, quando capita di sfogliare un testo, per comprendere rapidamente quale convenzione viene seguita basta gettare un colpo d'occhio sull'espressione dell'energia di un sistema: la differenza di segno nella definizione del potenziale U e dell'energia potenziale V (per riferirsi alla notazione di Levi–Civita) si riflette nella definizione dell'energia totale, che si scrive, ad esempio, $E = T + V$ (come faremo in questo testo) oppure $E = T - U$.

Si dice che un campo di forze $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ è *centrale* con centro O (che qui assumeremo come origine) se in ogni punto P identificato dal vettore $\mathbf{x}$ la forza soddisfa

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{F} = 0 \ , \tag{5.11}$$

ossia se la forza è parallela alla retta congiungente il punto P con O.

Si dice poi che il campo centrale ha simmetria sferica se

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}\big(\|\mathbf{x}\|\big) \ , \tag{5.12}$$

ossia se la forza dipende solo dalla distanza del punto P dal centro O delle forze.

Si verifica rapidamente che un campo di forze centrali a simmetria sferica può sempre scriversi nella forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(r)\,\frac{\mathbf{x}}{r} \ , \quad r = \|\mathbf{x}\| \ . \tag{5.13}$$

In effetti questa espressione mette in evidenza le due caratteristiche che definiscono il campo centrale con simmetria: $f(r)$ rappresenta il modulo o intensità della forza, comprendendovi anche il segno che specifica se si tratti di forza attrattiva (segno negativo) o repulsiva(segno positivo); $\frac{\mathbf{x}}{r}$ è un versore (o vettore di lunghezza unitaria) che specifica la direzione, o retta d'azione, della forza stessa.

Proposizione 5.4: *Ogni campo di forze centrali con simmetria sferica è conservativo, e l'energia potenziale è funzione della sola distanza dal centro, $V = V(r)$, e soddisfa la relazione*

$$f(r) = -\frac{dV}{dr} \ . \tag{5.14}$$

Dimostrazione. Si verifica che vale la proprietà (5.10). Scrivendo la forza come nella (5.13) se ne calcola la potenza come

$$\Pi = \mathbf{F}\cdot\dot{\mathbf{x}} = \frac{f(r)}{r}\mathbf{x}\cdot\dot{\mathbf{x}} \ .$$

Si osserva poi che

$$\mathbf{x}\cdot\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt}\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}{2} = \frac{d}{dt}\frac{r^2}{2} = r\dot{r} \ ,$$

e sostituendo questa identità nell'espressione precedente della potenza si conclude che

$$\Pi = f(r)\,\dot{r} = -\frac{dV}{dr}\,\dot{r} = -\dot{V} \ ,$$

sicché vale la (5.10). *Q.E.D.*

Il caso di forze centrali a simmetria sferica, benché da un punto di vista strettamente matematico si presenti come del tutto eccezionale, è di estremo interesse in Fisica. Vi rientra ad esempio il caso della forza di gravitazione newtoniana, di cui discuteremo in dettaglio più avanti facendo uso del formalismo di Lagrange.

Esercizio 5.6: Mostrare che il campo di forze $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -(\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_z)\mathbf{x} = -z\mathbf{x}$ è di tipo centrale, ma non è conservativo.

Esercizio 5.7: Mostrare che il campo di forze $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_z \wedge \mathbf{x}$ non è conservativo.

5.3 Problema a n corpi: teoremi generali

Passiamo ora a considerare un sistema di n punti materiali $P_1, \ldots, P_n$, con masse rispettivamente $m_1, \ldots, m_n$. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano con un'origine O identificheremo la posizione dei punti mediante i vettori $x_1, \ldots, x_n$. Ammetteremo poi, con Newton, che la dinamica sia determinata dal sistema di equazioni

$$
\begin{aligned}
m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{F}_1(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \dot{\mathbf{x}}_1, \ldots, \dot{\mathbf{x}}_n, t) \\
&\;\vdots \\
m_n \ddot{\mathbf{x}}_n &= \mathbf{F}_n(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \dot{\mathbf{x}}_1, \ldots, \dot{\mathbf{x}}_n, t) \; .
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

Qui assumiamo, in generale, che le forze agenti sui singoli punti dipendano dallo stato del sistema al tempo considerato, e dunque possano essere funzioni arbitrarie delle posizioni e velocità di tutti i punti, oltre che del tempo.

In generale abbiamo a che fare con un sistema si n equazioni vettoriali accoppiate, che pertanto non possono essere risolte separatamente. È però possibile introdurre delle quantità globali, analoghe a quelle già introdotte nel caso del moto di un punto, e studiarne l'evoluzione temporale. Le equazioni per tali quantità globali assumono una forma particolarmente interessante quando si ammetta che le forze soddisfino ad alcune ipotesi.

5.3.1 *Quantità meccaniche*

La quantità di moto, il momento della quantità di moto e l'energia cinetica di un sistema di punti materiali viene definito additivamente, ossia sommando le quantità corrispondenti relative a ciascun punto. Definiremo così:

(i) la quantità di moto totale del sistema

$$
\mathbf{P} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{p}_j = \sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{v}_j \; ; \tag{5.16}
$$

(ii) il momento della quantità di moto, o momento angolare, del sistema rispetto ad un polo Q assegnato

$$
\mathbf{\Gamma}_Q = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{\Gamma}_{Q,j} = \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_Q) \wedge \mathbf{p}_j \; ; \tag{5.17}
$$

(iii) l'energia cinetica totale del sistema

$$
T = \sum_{j=1}^{n} T_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{v}_j^2 \; . \tag{5.18}
$$

Procederemo in modo analogo per le quantità riferite alle forze. Definiremo così

(iv) la *risultante* delle forze

$$\mathbf{R} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_j \ ; \tag{5.19}$$

(v) il *momento risultante* delle forze rispetto ad un polo Q

$$\mathbf{N}_Q = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{N}_{Q,j} = \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_Q) \wedge \mathbf{F}_j \ ; \tag{5.20}$$

(vi) il *lavoro elementare* totale

$$\delta\mathscr{L} = \sum_{j=1}^{n} \delta\mathscr{L}_j = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_j \cdot d\mathbf{x}_j \ ; \tag{5.21}$$

(vii) la *potenza* totale delle forze

$$\Pi = \sum_{j=1}^{n} \Pi_j = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_j \cdot \mathbf{v}_j \ . \tag{5.22}$$

Vedremo più avanti come si possa definire l'energia totale. Anticipiamo però fin d'ora che essa non è additiva, ossia non può definirsi come somma delle energie dei singoli punti.

La nozione di quantità di moto totale $\mathbf{P}$ di un sistema di punti materiali è strettamente connessa a quella di *baricentro*, definito come

$$\mathbf{x}_B = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{x}_j \ , \quad M = \sum_{j=1}^{n} m_j \ . \tag{5.23}$$

Esercizio 5.8: Mostrare che il baricentro $\mathbf{x}_B$ è l'unico punto per cui vale $\sum_{j=1}^{n} m_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) = 0$.

Esercizio 5.9: Siamo dati tre punti P_1, P_2, P_3 di egual massa m. Mostrare che il baricentro è il punto di incontro delle mediane del triangolo che ha per vertici P_1, P_2, P_3 .

Esercizio 5.10: Consideriamo un sistema costituito da due sottosistemi di punti $P_1, \ldots, P_n$ con masse $m_1, \ldots, m_n$, e $P'_1, \ldots, P'_l$ con masse, rispettivamente, $m'_1, \ldots, m'_l$, e siano $\mathbf{x}_B$ e $\mathbf{x}_{B'}$ i baricentri dei due sottosistemi. Mostrare che il baricentro del sistema completo è

$$\mathbf{X} = \frac{1}{M + M'} (M\mathbf{x}_B + M'\mathbf{x}_{B'}) \ , \quad M = \sum_{j=1}^{n} m_j \ , \quad M' = \sum_{j=1}^{l} m'_j \ .$$

In molti problemi di interesse per la Meccanica, ad esempio il problema degli n corpi in molte delle sue varianti ed il problema del corpo rigido, risulta particolarmente utile considerare un sistema di riferimento con origine nel baricentro del sistema, e considerare il moto dei punti relativamente al baricentro. In tal caso la posizione del

punto P_j viene identificata dalla sua coordinata $\mathbf{x}'_j = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B$ relativa al baricentro, e ad essa corrisponde la velocità $\mathbf{v}'_j = \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B$.

Proposizione 5.5: *La quantità di moto totale di un sistema di punti è eguale alla quantità di moto $M\mathbf{v}_B$ del baricentro considerato come punto materiale di massa pari alla massa totale del sistema.*

Dimostrazione. Basta calcolare

$$\mathbf{P} = \sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{v}'_j + \sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{v}_B \ .$$

Il primo termine si annulla perché $\sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{v}'_j = \sum_{j=1}^{n} m_j(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B) = 0$ in virtù della definizione stessa di baricentro (si veda l'esercizio 5.8). Il secondo termine dà immediatamente $\sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{v}_B = M\mathbf{v}_B$, come asserito. *Q.E.D.*

Proposizione 5.6: *(Scomposizione del momento angolare.) Il momento della quantità di moto totale di un sistema di punti rispetto ad un polo Q si può scomporre come*

$$\mathbf{\Gamma}_Q = \mathbf{\Gamma}^{(\mathrm{rel})} + \mathbf{\Gamma}_Q^{(B)} \ , \quad \mathbf{\Gamma}^{(\mathrm{rel})} = \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \wedge m_j(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B)$$
$$\mathbf{\Gamma}_Q^{(B)} = (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \wedge M\mathbf{v}_B \ ,$$

dove $\mathbf{\Gamma}^{(\mathrm{rel})}$ è il momento della quantità di moto relativo al baricentro, che è indipendente dalla scelta del polo Q, e $\mathbf{\Gamma}_Q^{(B)}$ è il momento della quantità di moto del baricentro, considerato come un punto materiale di massa pari alla massa totale del sistema.

Dimostrazione. Si fa uso dell'identità $\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_Q = (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q)$, e si calcola

$$\mathbf{\Gamma}_Q = \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_Q) \wedge \mathbf{p}_j = \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \wedge \mathbf{p}_j + \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \wedge \mathbf{p}_j \ .$$

Il primo termine coincide con $\mathbf{\Gamma}^{(\mathrm{rel})}$ perché

$$\sum_{j=1}^{n} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \wedge \mathbf{p}_j = \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \wedge m_j \mathbf{v}'_j + \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \wedge m_j \mathbf{v}_B \ ,$$

e la seconda somma si annulla per la definizione stessa di baricentro (si veda l'esercizio 5.8). Per il termine restante si osserva che

$$\sum_{j=1}^{n} (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \wedge \mathbf{p}_j = (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \wedge \mathbf{P}$$

e si fa uso della proposizione 5.5. *Q.E.D.*

Proposizione 5.7: *(Teorema di König.) L'energia cinetica totale di un sistema di*

punti si può scomporre nella somma

$$T = T^{(\mathrm{rel})} + T^{(B)} \ , \quad T^{(\mathrm{rel})} = \frac{1}{2} m_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B)^2 \ ,$$
$$T^{(B)} = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_B^2 \ ,$$

dove $T^{(\mathrm{rel})}$ *è l'energia cinetica del moto relativo al baricentro, e* $T^{(B)}$ *è l'energia cinetica del baricentro considerato come punto materiale avente per massa la massa totale del sistema.*

Dimostrazione. Calcoliamo

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{v}_j^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} m_j (\mathbf{v}'_j + \mathbf{v}_B) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} m_j {\mathbf{v}'_j}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{v}_B^2 + \sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{v}'_j \cdot \mathbf{v}_B \end{aligned}$$

L'ultimo termine si annulla in virtù dell'identità

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{v}'_j \cdot \mathbf{v}_B = \sum_{j=1}^{n} m_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B) \cdot \mathbf{v}_B = \sum_{j=1}^{n} (m_j \mathbf{v}_j - m_j \mathbf{v}_B) \cdot \mathbf{v}_B = 0$$

che segue dalla definizione stessa di baricentro (si veda l'esercizio 5.8). I termini rimanenti danno l'espressione cercata. *Q.E.D.*

5.3.2 Forze di tipo classico

Ci proponiamo ora di dare una caratterizzazione generale delle forze. Assumiamo anzitutto di poter distinguere le forze che agiscono su un sistema di punti materiali in *forze interne* e *forze esterne*, scrivendo la forza che agisce su ciascun punto P_j come

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j^{(\mathrm{int})} + \mathbf{F}_j^{(\mathrm{est})} \ , \quad i = 1, \ldots, n \ , \tag{5.24}$$

attribuendo $\mathbf{F}_j^{(\mathrm{int})}$ all'azione di tutti gli altri punti del sistema e $\mathbf{F}_j^{(\mathrm{est})}$ all'azione di un non meglio specificato ambiente esterno sul punto P_j. Potremo così affermare che la forza esterna $\mathbf{F}_j$ agente sul punto P_j dipende solo dallo stato del punto P_j, e non da quello degli altri punti del sistema. In altre parole, assumeremo che sia $\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j(\mathbf{x}_j, \dot{\mathbf{x}}_j, t)$.

Sulle forze interne assumeremo che valgano le ipotesi seguenti:

(i) che per ogni coppia P_j, P_k di punti, con $j \neq k$, si possa isolare la forza $\mathbf{F}_{j,k}^{(\mathrm{int})}$ che il punto P_k esercita su un punto P_j: diremo che si tratta di *forze a due corpi*;

(ii) che la forza $\mathbf{F}_{j,k}^{(\mathrm{int})}$ dipenda solo dalla posizione dei due punti P_j, P_k, ossia che valga $\mathbf{F}_{j,k}^{(\mathrm{int})} = \mathbf{F}_{j,k}^{(\mathrm{int})}(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k)$: diremo che si tratta di *forze posizionali a due corpi*;

(iii) che la forza interna agente sul punto P_j possa esprimersi come

$$\mathbf{F}_j^{(\mathrm{int})} = \sum_{\substack{1\le k\le n\\ k\ne j}} \mathbf{F}_{j,k}^{(\mathrm{int})}(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k) \ , \tag{5.25}$$

ossia come somma vettoriale di tutte le forze esercitate da tutti gli altri punti: diremo che vale il principio di *sovrapposizione delle forze*.

Infine assumeremo che la forza posizionale a due corpi che si esercita tra due punti P_j, P_k soddisfi le tre proprietà che seguono.

(iv) Vale il *principio di azione e reazione*: la forza esercitata dal punto P_k su P_j è eguale e contraria a quella esercitata dal punto P_j sul punto P_k; in formula

$$\mathbf{F}_{j,k}^{(\mathrm{int})} + \mathbf{F}_{k,j}^{(\mathrm{int})} = 0 \ . \tag{5.26}$$

(v) La forza è *di tipo centrale*, ossia agisce nella direzione della retta congiungente i due punti; in formula

$$(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k) \wedge \mathbf{F}_{j,k}^{(\mathrm{int})} = 0 \ . \tag{5.27}$$

(vi) Le forze hanno *simmetria sferica*, ossia i loro moduli dipendono solo dalla distanza $r_{j,k} = \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k\|$ tra i due punti. Tenendo conto anche delle due ipotesi precedenti si potrà scrivere

$$\mathbf{F}_{j,k}^{(\mathrm{int})} = f_{j,k}(r_{j,k}) \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k}{r_{j,k}} \ . \tag{5.28}$$

Le forze che soddisfano le condizioni qui elencate vengono dette *di tipo classico*.

5.3.3 Le equazioni cardinali

Le ipotesi sulle forze formulate nel paragrafo precedente hanno come notevole conseguenza che le forze interne non hanno alcuna influenza sull'evoluzione temporale della quantità di moto e del momento della quantità di moto totale.

Definiamo la risultante delle forze esterne $\mathbf{R}^{(\mathrm{est})}$ ed il momento risultante delle forze esterne $\mathbf{N}_Q^{(\mathrm{est})}$ come

$$\mathbf{R}^{(\mathrm{est})} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_j^{(\mathrm{est})} \ , \quad \mathbf{N}_Q^{(\mathrm{est})} = \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_Q) \wedge \mathbf{F}_j^{(\mathrm{est})} \ . \tag{5.29}$$

Proposizione 5.8: *Per un sistema di n punti materiali, con forze interne a due corpi di tipo classico, la quantità di moto totale $\mathbf{P}$ ed il momento angolare totale $\mathbf{\Gamma}_Q$ evolvono nel tempo obbedendo alle equazioni*

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{R}^{(\mathrm{est})} \ , \tag{5.30}$$

ovvero $M\ddot{\mathbf{x}}_B = \mathbf{R}^{(\mathrm{est})}$, *e*

$$\dot{\mathbf{\Gamma}}_Q = \mathbf{N}_Q^{(\mathrm{est})} - \mathbf{v}_Q \wedge \mathbf{P} \ . \tag{5.31}$$

Corollario 5.9: *Se il polo Q è fisso, ossia $\mathbf{v}_Q = 0$, oppure si muove parallelamente al baricentro, ossia $\mathbf{v}_Q \wedge \mathbf{v}_B = 0$ allora l'equazione per il momento della quantità di moto totale (5.31) si scrive*

$$\dot{\mathbf{\Gamma}}_Q = \mathbf{N}_Q^{(\mathrm{est})} \ . \tag{5.32}$$

Il corollario segue immediatamente dalla proposizione se solo si ricorda che $\mathbf{P} = M\mathbf{v}_B$. Passiamo senz'altro alla

Dimostrazione della proposizione 5.8. Si osserva anzitutto che per la proposizione 5.5 vale

$$M\ddot{\mathbf{x}}_B = \dot{\mathbf{P}} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_j = \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{F}_j^{(\mathrm{est})} + \mathbf{F}_j^{(\mathrm{int})}) = \mathbf{R}^{(\mathrm{est})} + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_j^{(\mathrm{int})} \ .$$

Si mostra poi che la somma delle forze interne si annulla in virtù del principio di azione e reazione, proprietà (iv) del paragrafo 5.3.2. Infatti si ha

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_j^{(\mathrm{int})} &= \sum_{\substack{j,k=1,\ldots,n \\ j\neq k}} \mathbf{F}_{j,k}^{(\mathrm{int})} \\ &= \sum_{\substack{j,k=1,\ldots,n \\ j< k}} (\mathbf{F}_{j,k}^{(\mathrm{int})} + \mathbf{F}_{k,j}^{(\mathrm{int})}) \ , \end{aligned}$$

e ogni termine di quest'ultima somma si annulla in virtù della (5.26). Da qui segue la (5.30).
Per ricavare la (5.31) si fa uso sia del principio di azione e reazione che del principio delle forze centrali. Si calcola

$$\dot{\mathbf{\Gamma}}_Q = \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_Q) \wedge \mathbf{F}_j^{(\mathrm{int})} + \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_Q) \wedge \mathbf{F}_j^{(\mathrm{est})} - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{v}_Q \wedge \mathbf{p}_j \ .$$

La seconda somma non è altro che il momento delle forze esterne, per la (5.29), e la terza somma dà immediatamente

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{v}_Q \wedge \mathbf{p}_j = \mathbf{v}_Q \wedge \mathbf{P} \ .$$

Resta solo da mostrare che la prima somma si annulla. A tal fine si calcola

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_Q) \wedge \mathbf{F}_j^{(\mathrm{int})} &= \sum_{\substack{j,k=1,\ldots,n \\ j\neq k}} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_Q) \wedge \mathbf{F}_{j,k}^{(\mathrm{int})} \\ &= \sum_{\substack{j,k=1,\ldots,n \\ j< k}} \big[(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_Q) \wedge \mathbf{F}_{j,k}^{(\mathrm{int})} + (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_Q) \wedge \mathbf{F}_{k,j}^{(\mathrm{int})}\big] \\ &= \sum_{\substack{j,k=1,\ldots,n \\ j< k}} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k) \wedge \mathbf{F}_{j,k}^{(\mathrm{int})} \ . \end{aligned}$$

Per ricavare l'ultima eguaglianza si fa uso del principio di azione e reazione, ossia della (5.26). Per il principio delle forze centrali, ossia la (5.27), ciascun termine dell'ultima somma si annulla, e quindi la somma è nulla, come asserito. *Q.E.D.*

5.3.4 L'energia potenziale delle forze interne

Consideriamo il lavoro elementare totale che abbiamo definito mediante la (5.21) e che riscriviamo per comodità

$$\delta\mathscr{L} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_j \cdot d\mathbf{x}_j \ .$$

Anche in questo caso potremo separare il contributo delle forze esterne da quello delle forze interne, scrivendo

$$\begin{aligned} \delta\mathscr{L} = \delta\mathscr{L}^{(\mathrm{est})} + \delta\mathscr{L}^{(\mathrm{int})} \ , \quad \delta\mathscr{L}^{(\mathrm{est})} &= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_j^{(\mathrm{est})} \cdot d\mathbf{x}_j \ , \\ \delta\mathscr{L}^{(\mathrm{int})} &= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_j^{(\mathrm{int})} \cdot d\mathbf{x}_j \ . \end{aligned} \tag{5.33}$$

In modo analogo potremo scrivere la potenza totale delle forze, definita dalla (5.22), come somma dei contributi delle forze interne e di quelle esterne, ossia

$$\begin{aligned} \Pi = \Pi^{(\mathrm{est})} + \Pi^{(\mathrm{int})} \ , \quad \Pi^{(\mathrm{est})} &= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_j^{(\mathrm{est})} \cdot \mathbf{v}_j \ , \\ \Pi^{(\mathrm{int})} &= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_j^{(\mathrm{int})} \cdot \mathbf{v}_j \ . \end{aligned} \tag{5.34}$$

Torniamo ora a considerare forze interne di tipo classico, ossia forze a due corpi con simmetria sferica che scriveremo come nella (5.28), ossia

$$\mathbf{F}_{j,k}^{(\mathrm{int})} = f_{j,k}(r_{j,k}) \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k}{r_{j,k}} \ .$$

Proposizione 5.10: *Per le forze interne di tipo classico il lavoro elementare totale delle forze interne è un differenziale esatto, e si ha*

$$\delta\mathscr{L}^{(\mathrm{int})} = -dV^{(\mathrm{int})} \ , \quad \text{ovvero} \quad \dot{\Pi}^{(\mathrm{int})} = -\dot{V}^{(\mathrm{int})}$$

dove l'energia potenziale $V^{(\mathrm{int})}$ si scrive come somma dei contributi di ciascuna coppia di punti nella forma

$$V^{(\mathrm{int})} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,k=1,\ldots,n \\ j\neq k}} V_{j,k}^{(\mathrm{int})}(r_{j,k}) \ , \quad \mathbf{F}_{j,k}^{(\mathrm{int})} = -\frac{dV_{j,k}^{(\mathrm{int})}}{dr_{j,k}} \ . \tag{5.35}$$

Dimostrazione. Si inizia osservando che la potenza si esprime come somma dei contributi di ciascuna coppia di punti. A tal fine si calcola

$$\begin{aligned}\Pi^{(\mathrm{int})} &= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_j^{(\mathrm{int})} \cdot \mathbf{v}_j = \sum_{\substack{j,k=1,\ldots,n\\ j\neq k}} \mathbf{F}_{j,k}^{(\mathrm{int})} \cdot \mathbf{v}_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,k=1,\ldots,n\\ j\neq k}} \mathbf{F}_{j,k}^{(\mathrm{int})} \cdot \mathbf{v}_j + \mathbf{F}_{k,j}^{(\mathrm{int})} \cdot \mathbf{v}_k \ ,= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,k=1,\ldots,n\\ j\neq k}} \mathbf{F}_{j,k}^{(\mathrm{int})} \cdot (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_k)\ .\end{aligned}$$

dove si è resa simmetrica l'espressione negli indici j, k duplicando ciascun addendo con uno scambio di indici ed aggiungendo il fattore $1/2$ perché il contributo di ciascuna coppia è calcolato due volte, e si è fatto uso del principio di azione e reazione. Mostriamo ora che si può introdurre l'energia potenziale per ciascuna coppia di punti. Si ha infatti, grazie alla forma delle forze interne di tipo classico,

$$\mathbf{F}_{j,k}^{(\mathrm{int})} \cdot (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_k) = f_{j,k}(r_{j,k}) \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k}{r_{j,k}} \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)\ .$$

Si calcola poi

$$(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k) \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} r_{j,k}^2 = r_{j,k}\dot r_{j,k}\ ,$$

sicché ricordando la (5.35) si ottiene

$$\mathbf{F}_{j,k}^{(\mathrm{int})} \cdot (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_k) = f_{j,k}(r_{j,k})\dot r_{j,k} = -\dot V_{j,k}^{(\mathrm{int})}(r_{j,k})\ .$$

Sostituendo nell'espressione della potenza delle forze interne si ricava immediatamente l'asserto. *Q.E.D.*

5.3.5 Sistemi conservativi

Consideriamo ora l'energia cinetica totale. L'esistenza dell'energia potenziale per forze interne di tipo classico ci permette immediatamente di enunciare la

Proposizione 5.11: *L'energia cinetica totale e l'energia potenziale delle forze interne evolvono nel tempo obbedendo all'equazione*

$$\frac{d}{dt}\bigl(T + V^{(\mathrm{int})}\bigr) = \Pi^{(\mathrm{est})}\ . \tag{5.36}$$

Dimostrazione. Dalle definizioni (5.18) dell'energia cinetica totale e (5.22) della potenza totale delle forze si ricava subito che anche per un sistema di punti vale l'equazione $\dot T = \Pi$, perché essa si applica a ciascun punto del sistema. D'altra parte ricordando la (5.34) possiamo scomporre la potenza delle forze in $\Pi = \Pi^{(\mathrm{est})} + \Pi^{(\mathrm{int})}$, e per la proposizione 5.10 abbiamo $\Pi^{(\mathrm{int})} = -\dot V^{(\mathrm{int})}$, e da qui si ricava subito la (5.36), come asserito. *Q.E.D.*

Resta quindi da esaminare il contributo delle forze esterne. A tal fine dobbiamo ricordare che abbiamo ammesso che la forza esterna agente sul punto P_j dipenda solo dalla posizione e velocità del punto P_j stesso, oltre che dal tempo. Possiamo quindi

riconducrci al problema di un solo punto materiale che abbiamo discusso nel paragrafo 5.2.3, considerando il caso in cui la forza $\mathbf{F}_j$ agente sul punto P_j sia puramente posizionale e conservativa, ossia soddisfi

$$\delta\mathscr{L}_j^{(\mathrm{est})} = \mathbf{F}_j \cdot d\mathbf{x}_j = -dV^{(\mathrm{est})} \ , \quad \text{ovvero} \quad \dot{\Pi}_j^{(\mathrm{est})} = \mathbf{F}_j^{(\mathrm{est})} \cdot \mathbf{v}_j = -\dot{V}_j^{(\mathrm{est})} \ .$$

In tal caso esisterà l'energia potenziale $V^{(\mathrm{est})}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ delle forze esterne, essendo

$$V^{(\mathrm{est})}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \sum_{j=1}^{n} V_j^{(\mathrm{est})}(\mathbf{x}_j) \ . \tag{5.37}$$

Potremo allora enunciare la

Proposizione 5.12: *(Teorema di conservazione dell'energia) Se le forze esterne agenti su ciascun punto del sistema ammettono potenziale, allora si conserva l'energia totale $E = T + V^{(\mathrm{est})} + V^{(\mathrm{int})}$.*

5.3.6 Leggi di conservazione

Le equazioni cardinali e il teorema dell'energia assumono un significato particolarmente interessante se si considera un sistema su cui non agiscono forze esterne, o, come a volte si dice, un sistema *chiuso*, o *isolato*. Valgono in questo caso le *leggi di conservazione.*

Proposizione 5.13: *Sia dato un sistema di n punti materiali $P_1, \ldots, P_n$ con masse $m_1, \ldots, m_n$ con forze interne di tipo classico e non soggetto a forze esterne. Allora si ha*

(i) la conservazione della quantità di moto (o momento) totale:

$$\dot{\mathbf{P}} = 0 \ ;$$

(ii) la conservazione del momento della quantità di moto totale rispetto ad un qualunque polo fisso (che assumiamo come origine del sistema di riferimento):

$$\dot{\mathbf{\Gamma}}_O = 0 \ ;$$

(iii) la conservazione dell'energia totale $E = T + V^{(\mathrm{int})}$:

$$\dot{T} + \dot{V}^{(\mathrm{int})} = 0 \ ;$$

(iv) il moto uniforme del baricentro:

$$\mathbf{x}_B(t) = \mathbf{v}_{B,0}t + \mathbf{x}_{B,0} \ ,$$

dove $\mathbf{x}_{B,0}$ è la posizione iniziale e $\mathbf{v}_{B,0} = \mathbf{P}/M$ è la velocità iniziale del baricentro, ambedue costanti.

In particolare si può scegliere il sistema di riferimento in modo che si abbia $\mathbf{P} = 0$.

L'asserto è ovvia conseguenza delle proposizioni 5.8 e 5.11.

La proposizione è in pratica l'elenco dei cosiddetti *10 integrali primi classici*: momento, momento angolare, energia, posizione iniziale del baricentro. La conoscenza

di questi integrali primi consente di ridurre di 10 l'ordine del sistema d equazioni differenziali per il problema di N punti materiali.

Per $N = 2$ questa informazione risulta essere sufficiente per integrare completamente le equazioni: discuteremo in dettaglio questo problema nel capitolo 8.

Per $N > 2$ invece i 10 integrali primi classici non bastano: occorrerebbe trovarne altri. Ma alla fine del secolo XIX Bruns e Poincaré hanno dimostrato che in generale non esistono altri integrali primi oltre a quelli classici.

5.3.7 Integrali primi e simmetrie

Gli integrali primi che abbiamo trovato possono vedersi come conseguenze di proprietà di simmetria, o di invarianza delle equazioni rispetto a particolari trasformazioni. Qui dobbiamo considerare:

(i) l'invarianza rispetto a traslazioni spaziali, da cui segue la conservazione della quantità di moto (o momento);

(ii) l'invarianza rispetto a rotazioni, da cui segue la conservazione del momento della quantità di moto (o momento angolare);

(iii) l'invarianza per traslazioni temporali, da cui segue la conservazione dell'energia.

(iv) l'invarianza per trasformazioni di Galileo

$$(\mathbf{x},\, t) \longrightarrow (\mathbf{x} + \mathbf{v}t,\, t)$$

con velocità $\mathbf{v}$ costante, da cui segue la conservazione della posizione iniziale del baricentro.

Le simmetrie che qui abbiamo messo in evidenza costituiscono un gruppo (nel senso matematico del termine) detto appunto *gruppo di Galileo*. L'elemento più generale del gruppo di Galileo è composizione di elementi dei quattro sottogruppi elencati.

Rimandiamo la discussione di questo problema al capitolo 8, paragrafo 8.3.4.

5.4 Il moto relativo

Il problema del moto relativo consiste nel determinare le relazioni che intercorrono tra le descrizioni del moto di un punto P fornite da due osservatori in moto l'uno rispetto all'altro.

5.4.1 Formulazione del problema

Consideriamo un primo osservatore solidale dotato di un sistema di riferimento cartesiano $S^* = (O^*, \mathbf{u}_x^*, \mathbf{u}_y^*, \mathbf{u}_z^*)$ identificato dall'origine O^* e da una terna di versori ortogonali $\mathbf{u}_x^*, \mathbf{u}_y^*, \mathbf{u}_z^*$; converremo di chiamare *fisso* o *assoluto* questo primo riferimento.[32]

Consideriamo poi un secondo osservatore, anch'esso dotato di un sistema di riferimento cartesiano $S = (O, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$, che converremo di chiamare *mobile* o *relativo*.

[32] Gli aggettivi *assoluto* e *relativo* hanno qui un significato puramente convenzionale: non abbiamo a priori nessun motivo per considerare uno dei due osservatori come privilegiato.

Supponiamo di conoscere il movimento del riferimento mobile S rispetto al riferimento fisso S^*. Questo significa che ad ogni istante t conosciamo la posizione dell'origine O, identificata da un vettore $\mathbf{x}_O(t)$, e le componenti dei tre versori $\mathbf{u}_x(t), \mathbf{u}_y(t), \mathbf{u}_z(t)$, che dovranno mantenersi mutuamente ortogonali durante il movimento.[33]

Supponiamo poi di conoscere il movimento di un punto P come descritto da ciascuno dei due osservatori.

Il primo osservatore descriverà il moto del punto P mediante un vettore $\mathbf{x}(t) = x_1(t)\mathbf{u}_x^* + x_2(t)\mathbf{u}_y^* + x_3\mathbf{u}_z^*$ dandone le componenti nel riferimento S^*; diremo che $\mathbf{x}(t)$ rappresenta il moto assoluto del punto, e denoteremo con $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{a}(t)$ la velocità e l'accelerazione assolute, ossia viste dall'osservatore fisso.

Il secondo osservatore, a sua volta, descriverà il moto specificando le componenti di un vettore $\mathbf{x}^{(r)}(t) = x_1^{(r)}(t)\mathbf{u}_x + x_2^{(r)}(t)\mathbf{u}_y + x_3^{(r)}(t)\mathbf{u}_z$ sul sistema di riferimento S; diremo che $\mathbf{x}^{(r)}(t)$ rappresenta il moto *relativo* di P, e denoteremo con $\mathbf{v}^{(r)}(t)$ e $\mathbf{a}^{(r)}(t)$ la velocità e l'accelerazione relative, ossia viste dall'osservatore mobile.

Si chiede di trovare le relazioni tra le due descrizioni del movimento fornite dai due osservatori.

5.4.2 Una breve digressione di carattere geometrico

Ci proponiamo di ricavare alcune formule che ci permetteranno di descrivere il moto di rotazione della terna mobile rispetto a quella fissa. In particolare ci interessa stabilire le relazioni tra le coordinate di un qualunque vettore $\mathbf{x}^{(r)}$ sulla terna fissa e su quella mobile, assumendo per ora che le origini O^* ed O dei due riferimenti coincidano.

La posizione istantanea degli assi $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$, $\mathbf{u}_z$ è assegnata, come abbiano già sottolineato, mediante le componenti dei tre versori sulla base $\mathbf{u}_x^*$, $\mathbf{u}_y^*$, $\mathbf{u}_z^*$ del riferimento fisso. Possiamo dunque scrivere, con notazione ovvia,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \\ \mathbf{u}_z \end{pmatrix} = \mathsf{R}^\top \begin{pmatrix} \mathbf{u}_x^* \\ \mathbf{u}_y^* \\ \mathbf{u}_z^* \end{pmatrix} \tag{5.38}$$

dove la matrice $\mathsf{R} = (\,\mathbf{u}_x\ \mathbf{u}_y\ \mathbf{u}_z\,)$ è costruita allineando in colonna le componenti dei tre versori $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$, $\mathbf{u}_z$ sulla terna fissa. La proprietà di ortonormalità dei versori ci dà immediatamente la relazione $\mathsf{R}^\top\mathsf{R} = \mathsf{I}$, essendo I la matrice identità, sicchè l'inversa di R coincide con la sua trasposta.[34] Date le componenti $x_j^{(r)}$ di un qualunque vettore $\mathbf{x}^{(r)}$ sulla terna mobile avremo le componenti corrispondenti x_j sulla terna fissa nella forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathsf{R} \begin{pmatrix} x^{(r)} \\ y^{(r)} \\ z^{(r)} \end{pmatrix} \quad ,$$

[33] Tradizionalmente le componenti dei versori vengono dette *coseni direttori* del riferimento mobile.

[34] Questa è la proprietà delle matrici *ortogonali*, o matrici di rotazione.

che scriveremo più brevemente $\mathbf{x} = \mathsf{R}\,\mathbf{x}^{(r)}$.

Supponiamo ora che sia $\mathsf{R}(t)$ che $\mathbf{x}^{(r)}(t)$ siano funzioni differenziabili del tempo. Derivando la relazione $\mathbf{x} = \mathsf{R}\,\mathbf{x}^{(r)}$ otteniamo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathsf{R}\,\dot{\mathbf{x}}^{(r)} + \dot{\mathsf{R}}\,\mathbf{x}^{(r)}\ . \tag{5.39}$$

Il primo termine $\mathsf{R}\,\dot{\mathbf{x}}^{(r)}$ altro non è che la velocità relativa $\mathbf{v}^{(r)}$ riportata sulla terna fissa. Il secondo termine $\dot{\mathsf{R}}\,\mathbf{x}^{(r)}$ è un vettore di cui conosciamo le componenti sulla terna fissa. È conveniente riscriverlo nella forma $\mathsf{R}\mathsf{R}^\top\dot{\mathsf{R}}\,\mathbf{x}^{(r)}$, dove $\mathsf{R}^\top\dot{\mathsf{R}}\,\mathbf{x}^{(r)}$ è un vettore di cui conosciamo le componenti sulla terna mobile.

Lemma 5.14: *Esiste un unico vettore $\boldsymbol{\omega}$, le cui componenti sono definite come*

$$\omega_x = \dot{\mathbf{u}}_y\cdot\mathbf{u}_z\ ,\quad \omega_y = \dot{\mathbf{u}}_z\cdot\mathbf{u}_x\ ,\quad \omega_z = \dot{\mathbf{u}}_x\cdot\mathbf{u}_y\ , \tag{5.40}$$

tale che si ha

$$\mathsf{R}^\top\dot{\mathsf{R}}\,\mathbf{x}^{(r)} = \boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{x}^{(r)}\ . \tag{5.41}$$

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che $\mathsf{R}^\top\dot{\mathsf{R}}$ è una matrice antisimmetrica. Infatti derivando la relazione $\mathsf{R}^\top\mathsf{R} = \mathsf{I}$ otteniamo $0 = \dot{\mathsf{R}}^\top\mathsf{R} + \mathsf{R}^\top\dot{\mathsf{R}} = \left(\mathsf{R}^\top\dot{\mathsf{R}}\right)^\top + \mathsf{R}^\top\dot{\mathsf{R}}$, che è proprio la relazione di antisimmetria. Ora, una matrice antisimmetrica 3×3 è determinata da tre sole quantità, e possiamo sempre scrivere

$$\mathsf{R}^\top\dot{\mathsf{R}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}\ , \tag{5.42}$$

da cui si ricava direttamente la definizione (5.40) di $\boldsymbol{\omega}$, evidentemente determinato in modo univoco se $\mathsf{R}(t)$ è nota. Basta allora calcolare

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{(r)} \\ y^{(r)} \\ z^{(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_y z^{(r)} - \omega_z y^{(r)} \\ \omega_z x^{(r)} - \omega_x z^{(r)} \\ \omega_x y^{(r)} - \omega_y x^{(r)} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{x}^{(r)}\ ,$$

come asserito. *Q.E.D.*

In conseguenza del lemma possiamo riscrivere la (5.39) come

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathsf{R}\left(\mathbf{v}^{(r)} + \boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{x}^{(r)}\right)\ . \tag{5.43}$$

Questa formula ha un ruolo cruciale sia nel problema del moto relativo sia nella dinamica del corpo rigido.

5.4.3 *Composizione galileiana della velocità*

Torniamo al problema di stabilire le relazioni tra i due osservatori. Con semplici considerazioni geometriche stabiliamo la relazione tra le posizioni del punto P come descritte dai due osservatori componendo una traslazione ed una rotazione, ossia

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_O + \mathsf{R}\,\mathbf{x}^{(r)}\ , \tag{5.44}$$

dove R è l'operatore di rotazione la cui matrice sulla base del riferimento fisso si scrive nella forma (5.38). Intendiamo con questo che l'osservatore fisso vede il vettore $\mathbf{x}$ che identifica la posizione del punto P nel suo riferimento S^* come somma di due vettori:

(i) il vettore $\mathbf{x}_O$ che dà la posizione dell'origine O del riferimento mobile S, e che introduce una traslazione;

(ii) il vettore $\mathbf{x}^{(r)}$ che dà la posizione del punto P rispetto al riferimento mobile, che l'osservatore fisso deve trasformare mediante una rotazione per tener conto dell'orientamento degli assi mobili.

Derivando rispetto al tempo ambo i membri della (5.44) scriviamo

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_O + \dot{\mathsf{R}}\,\mathbf{x}^{(r)} + \mathsf{R}\,\dot{\mathbf{x}}^{(r)} \ ,$$

e facendo uso del lemma 5.14 ricaviamo la formula di *composizione galileiana delle velocità*

$$\mathbf{v} = \mathsf{R}\,\mathbf{v}^{(r)} + \mathbf{v}^{(\tau)} \ , \quad \mathbf{v}^{(\tau)} = \mathbf{v}_O + \mathsf{R}(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}^{(r)}) \tag{5.45}$$

Nel membro di destra riconosciamo tre contributi alla velocità.

(i) Il termine $\mathbf{v}^{(r)}$ è la *velocità relativa*, ossia il solo contributo visto dall'osservatore mobile, che l'osservatore fisso riporta nel suo riferimento applicando la rotazione.

(ii) Il termine $\mathbf{v}_O$ è il contributo dovuto al *trascinamento traslatorio*, che l'osservatore fisso deve aggiungere perché tiene conto della traslazione nel tempo del riferimento mobile.

(iii) Il termine $\omega \wedge \mathbf{x}^{(r)}$ è il contributo dovuto al *trascinamento rotatorio*, che l'osservatore fisso deve aggiungere per tener conto del moto di rotazione del riferimento mobile, avendolo riportato al proprio riferimento mediante la rotazione.

I due termini di trascinamento vengono solitamente raccolti in un unico termine $v^{(\tau)}$, come abbiamo fatto sopra.

Esempio 5.2: *Trascinamento traslatorio* Consideriamo il caso di un osservatore mobile che sia in moto rettilineo traslatorio rispetto al riferimento fisso. Possiamo ben supporre che ad un certo istante t_0 le origini dei due sistemi coincidano, e in quell'istante scegliere gli assi dei due riferimenti in modo che siano paralleli, ossia $\mathbf{u}_x(t) = \mathbf{u}_x^*$, $\mathbf{u}_y(t) = \mathbf{u}_y^*$, $\mathbf{u}_z(t) = \mathbf{u}_x^*$. In tal caso si ha $\mathsf{R} = \mathsf{I}$, l'identità, e $\boldsymbol{\omega} = 0$. La formula di composizione delle velocità assume la forma particolarmente semplice

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}^{(r)} \ ,$$

a significare che la velocità assoluta è la somma della velocità relativa e della velocità di trascinamento traslatorio. In particolare, se il punto P è a riposo nel riferimento mobile allora la sua velocità relativa $\mathbf{v}^{(r)}$ si annulla, e la sua velocità assoluta si riduca al solo termine di trascinamento. È interessante anche considerare il punto di vista dell'osservatore mobile. A tal fine dobbiamo rovesciare la formula precedente, scrivendo

$$\mathbf{v}^{(r)} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_O \ .$$

Ciò significa che alla velocità assoluta occorre sottrarre la velocità del riferimento. In particolare l'osservatore mobile vedrà traslare con velocità $\mathbf{v}_O$ tutti gli oggetti fermi rispetto al riferimento mobile S. Dal canto suo, l'osservatore mobile vedrà traslare con velocità $-\mathbf{v}_O$ tutti gli oggetti fermi rispetto al riferimento fisso S^*. Il lettore non avrà difficoltà a comprendere questi fenomeni pensando al caso di un osservatore seduto sulla panchina di una stazione e di un viaggiatore seduto sulla poltrona di un vagone mentre il treno transita (su un binario rettilineo) nella stazione, non necessariamente a velocità uniforme.

Esempio 5.3: *Trascinamento rotatorio: il caso di un asse fisso* Consideriamo ora un riferimento mobile in rotazione attorno ad un asse fisso. Per rifarsi ad un esempio specifico, si pensi al caso di un bambino a cavalcioni di un cavallo su una giostra in rotazione, ed alla nonna che attende pazientemente, ferma sul prato. Fissiamo i riferimenti in modo che abbiano in comune l'origine e l'asse z, e che questo sua volta coincida con l'asse di rotazione del sistema mobile; in formule avremo $O^* = O$ e $\mathbf{u}_z^* = \mathbf{u}_z$. Avremo poi, supponendo che al tempo $t = 0$ le due terne coincidano,

$$\mathbf{u}_x = \cos\vartheta(t)\mathbf{u}_x^* + \sin\vartheta(t)\mathbf{u}_y^* \ , \quad \mathbf{u}_y = -\sin\vartheta(t)\mathbf{u}_x^* + \cos\vartheta(t)\mathbf{u}_y^* \ ,$$

e derivando rispetto al tempo

$$\dot{\mathbf{u}}_x = -\dot\vartheta\sin\vartheta(t)\mathbf{u}_x^* + \dot\vartheta\cos\vartheta(t)\mathbf{u}_y^* \ , \quad \dot{\mathbf{u}}_y = -\dot\vartheta\cos\vartheta(t)\mathbf{u}_x^* - \dot\vartheta\sin\vartheta(t)\mathbf{u}_y^* \ , \quad \dot{\mathbf{u}}_z = 0 \ .$$

Da qui ricaviamo

$$\mathsf{R} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta(t) & -\sin\vartheta(t) & 0 \\ \sin\vartheta(t) & \cos\vartheta(t) & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \ , \quad \boldsymbol{\omega} = \dot\vartheta\mathbf{u}_z \ .$$

In tal caso riscriviamo la formula di composizione delle velocità come

$$\mathbf{v} = \mathsf{R}\,\mathbf{v}^{(r)} + \mathsf{R}\,(\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{x}^{(r)}) \ ,$$

il che significa che l'osservatore fisso deve sommare al movimento del punto P visto dall'osservatore mobile il moto di rotazione della terna S. Analogamente, l'osservatore mobile riscriverà la stessa equazione nella forma

$$\mathbf{v}^{(r)} = \mathsf{R}^\top - \boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{x}^{(r)} \ ,$$

e quindi dovrà sottrarre al moto assoluto il moto di rotazione proprio del suo riferimento. Anche qui è particolarmente interessante considerare il caso di un punto solidale col riferimento mobile S : il moto visto dall'osservatore fisso sarà puramente rotatorio, perché $\mathbf{v} = \mathsf{R}(\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{x}^{(r)})$. D'altra parte l'osservatore mobile, vedrà tutti gli oggetti fissi nel riferimento assoluto ruotare intorno a lui, perché dovrà scrivere $\mathbf{v}^{(r)} = -\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{x}^{(r)}$. Il lettore potrà comprendere questa descrizione pensando all'esempio della giostra cui abbiamo accennato sopra.

5.4.4 Il teorema di Coriolis

Calcoliamo ora le accelerazioni. Derivando la formula di composizione galileiana delle velocità (5.45) otteniamo

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}_O + \dot{\mathsf{R}}(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}^{(r)}) + \mathsf{R}(\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{x}^{(r)} + \boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\mathbf{x}}^{(r)}) + \dot{\mathsf{R}}\,\mathbf{v}^{(r)} + \mathsf{R}\,\dot{\mathbf{v}}^{(r)} \ ,$$

ed applicando di nuovo il lemma 5.14 abbiamo

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^{(\tau)} + \mathbf{a}^{(c)} + \mathsf{R}\,\mathbf{a}^{(r)} \ , \quad \begin{aligned} \mathbf{a}^{(\tau)} &= \mathbf{a}_O + \mathsf{R}\big(\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}^{(r)})\big) + \mathsf{R}\big(\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{x}^{(r)}\big) \\ \mathbf{a}^{(c)} &= 2\mathsf{R}\big(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}^{(r)}\big) \end{aligned} \tag{5.46}$$

Qui riconosciamo ben cinque contributi.

(i) Il termine $\mathbf{a}^{(r)}$ è l'accelerazione relativa, il solo contributo visto dall'osservatore mobile.

(ii) Il termine $\mathbf{a}_O$ è il trascinamento dovuto all'accelerazione del moto traslatorio. Questo contributo non si presenta se il moto di traslazione è uniforme.

(iii) Il termine $\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}^{(r)})$ è un trascinamento dovuto al moto rotatorio, ed è responsabile della forza centrifuga. Questo contributo è presente anche in caso di rotazione uniforme.

(iv) Il termine $\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{x}^{(r)}$ è un trascinamento dovuto all'accelerazione della rotazione. Non è presente in caso di rotazione a velocità angolare uniforme.

(v) Il termine $\mathbf{a}^{(c)}$ è detto accelerazione complementare o *di Coriolis*. Viene considerato separatamente perché non agisce sui punti solidali col riferimento mobile.

Anche qui, tutti i termini di trascinamento che dipendono dalla posizione del punto P (e non dalla sua velocità) vengono raccolti nel termine di accelerazione di trascinamento $\mathbf{a}^{(\tau)}$.

5.4.5 Sistemi inerziali

Veniamo ora a qualche considerazione sullo spazio assoluto e sul modo di rivelarne l'esistenza, se possibile. È d'obbligo iniziare la discussione col celebre brano del "gran navilio", tratto dalla giornata seconda del *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* di Galileo.

> " *Riserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; siavi anco un gran vaso d'acqua, e dentrovi de' pescetti; sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vadia versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non più gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze sieno eguali; e saltando voi, come si dice, a piè giunti, eguali spazii passerete verso tutte le parti. Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia che mentre*

il vassello sta fermo non debbano succeder così, fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma: voi saltando passerete nel tavolato i medesimi spazii che prima, né, perché la nave si muova velocissimamente, farete maggior salti verso la poppa che verso la prua, benché, nel tempo che voi state in aria, il tavolato sottopostovi scorra verso la parte contraria al vostro salto; e gettando alcuna cosa al compagno, non con più forza bisognerà tirarla, per arrivarlo, se egli sarà verso la prua e voi verso poppa, che se voi fuste situati per l'opposito; le gocciole cadranno come prima nel vaso inferiore, senza caderne pur una verso poppa, benché, mentre la gocciola è per aria, la nave scorra molti palmi; i pesci nella lor acqua non con più fatica noteranno verso la precedente che verso la sussequente parte del vaso, ma con pari agevolezza verranno al cibo posto su qualsivoglia luogo dell'orlo del vaso; e finalmente le farfalle e le mosche continueranno i lor voli indifferentemente verso tutte le parti, né mai accaderà che si riduchino verso la parete che riguarda la poppa, quasi che fussero stracche in tener dietro al veloce corso della nave, dalla quale per lungo tempo, trattenendosi per aria, saranno state separate; e se abbruciando alcuna lagrima d'incenso si farà un poco di fumo, vedrassi ascender in alto ed a guisa di nugoletta trattenervisi, e indifferentemente muoversi non più verso questa che quella parte. E di tutta questa corrispondenza d'effetti ne è cagione l'esser il moto della nave comune a tutte le cose contenute in essa ed all'aria ancora, che per ciò dissi io che si stesse sotto coverta; ché quando si stesse di sopra e nell'aria aperta e non seguace del corso della nave, differenze più e men notabili si vedrebbero in alcuni de gli effetti nominati: e non è dubbio che il fumo resterebbe in dietro, quanto l'aria stessa; le mosche parimente e le farfalle, impedite dall'aria, non potrebber seguir il moto della nave, quando da essa per spazio assai notabile si separassero; ma trattenendovisi vicine, perché la nave stessa, come di fabbrica anfrattuosa, porta seco parte dell'aria sua prossima, senza intoppo o fatica seguirebbon la nave, e per simil cagione veggiamo tal volta, nel correr la posta, le mosche importune e i tafani seguir i cavalli, volandogli ora in questa ed ora in quella parte del corpo; ma nelle gocciole cadenti pochissima sarebbe la differenza, e ne i salti e ne i proietti gravi, del tutto impercettibile. "

Nel liguaggio freddo e formale delle formule possiamo riassumere il contenuto principale del brano di Galileo come segue. Identifichiamo il nostro ipotetico sistema assoluto con il riferimento fisso $S^* = (O^*, \mathbf{u}_x^*, \mathbf{u}_y^*, \mathbf{u}_z^*)$, e consideriamo un riferimento mobile $S = (O, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$ che trasla in modo uniforme rispetto a quello, come nell'esempio 5.2 ma supponendo che la velocità $\mathbf{v}_O$ sia costante. Allora la (5.47) deve riscriversi come $\mathbf{a}^{(r)} = \mathbf{a}$, il che significa che i due osservatori vedono la stessa accelerazione.

Questo argomento porta a concludere che *le leggi della dinamica sono le stesse per tutti gli osservatori in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro.* Non esiste un esperimento di Meccanica che permetta di privilegiare uno di tali osservatori rispetto agli altri.

Se poi si ammette che esista uno spazio assoluto in cui valganon le leggi della Meccanica come enunciate da newtono, ed in particolare il principio d'inerzia, si deve concludere che le stesse leggi valgono in tutti i sistemi di riferimento in moto uniforme rispetto allo spazio assoluto. Si identifica così la classe dei *sistemi inerziali*, tutti equivalenti dal punto di vista dinamico.[35]

5.4.6 Sistemi non inerziali e forze apparenti

Nel caso di sistemi di riferimento non inerziali si ha il risultato notevole — nell'ambito della teoria classica — che il movimento può rivelarsi mediante un esperimento meccanico.

Un primo esempio è quello di un osservatore mobile che trasla con velocità non uniforme. In tal caso dovremo riscrivere la (5.47) come

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}^{(r)} \ .$$

Ammettiamo ora, con Newton, che nel sistema fisso valga l'equazione $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$, dove $\mathbf{F}$ è una forza che possiamo considerare in qualche modo come dovuta ad una causa fisica, ad esempio una forza di tipo gravitazionale o elettrico o magnetico o elastico &c. Allora l'osservatore mobile dovrà scrivere l'equazione di Newton come

$$m\mathbf{a}^{(r)} = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_O \ ,$$

il che significa che dovrà aggiungere alla forza $\mathbf{F}$ una forza fittizia, o *apparente*, dovuta all'accelerazione del suo riferimento. Alla luce di questa osservazione si intepretano facilmente una serie di esperienze che fanno parte della nostra vita quotidiana.

(i) Quando una vettura si mette in moto il passeggero avverte una forza che lo schiaccia sul sedile, tanto più forte quanto maggiore è l'accelerazione. Analogamente, in caso di frenata il passeggero si sente proiettato in avanti.

(ii) Alla partenza di un ascensore si avverte una sensazione di diminuzione di peso in caso di discesa o di aumento di peso in caso di salita. Tale sensazione sparisce dopo un breve intervallo, quando il moto dell'ascensore è diventato praticamente uniforme, per poi ripresentarsi con segno opposto nel momento in cui l'ascensore si ferma.

---

[35] La riflessione su questo problema è stata particolarmente viva verso la fine del secolo XIX, quando la scoperta della propagazione delle onde elettromagnetiche ha fatto nascere l'ipotesi che il sistema assoluto postesse identificarsi col mezzo di trasmissioni di tali onde, chiamato *etere*. Tuttavia i tentativi sperimentali di rivelare il moto della Terra rispetto all'etere non portarono ad alcun risultato, e si pervenne ad enunciare il principio secondo il quale *tutte le leggi della Fisica sono le stesse per tutti gli osservatori inerziali*. Lo sviluppo di questa linea di pensiero portò dapprima alla *Relatività ristretta*, sviluppata indipendentemente e quasi contemporaneamente da Poincaré ed Einstein, e successivamente all'elaborazione da parte di Einstein della *Relatività generale*.

(iii) Un astronauta in orbita nella sua navicella spaziale si trova in assenza di peso (spiegare perché). Si noti che questo fenomeno è puramente locale, perché nello spazio ristretto della navicella il campo gravitazionale può considerarsi praticamente costante.[36]

Il caso più interessante è quello di riferimenti in rotazione uniforme. Consideriamo ancora l'esempio 5.3 della rotazione attorno ad un asse fisso, riprendendo le stesse formule per descrivere il movimento della terna mobile, ma imponendo $\vartheta(t) = \omega t$, dove $\omega \in \mathbb{R}$ è la velocità angolare di rotazione. Di conseguenza avremo $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{u}_z$. Mettiamoci dal punto di vista dell'osservatore mobile, e riscriviamo la relazione (5.46) tra le accelerazioni come

$$\mathbf{a}^{(r)} = \mathsf{R}^\top \mathbf{a} - \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}^{(r)}) - 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}^{(r)} \ . \tag{5.47}$$

Qui abbiamo rimosso il termine $\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{x}^{(r)}$ proprio perché assumiamo che la rotazione sia uniforme.

Consideriamo un punto P solidale col riferimento mobile, sicché $\mathbf{v}^{(r)} = 0$, e riscriviamo l'equazione di Newton nella forma

$$m\mathbf{a}^{(r)} = \mathsf{R}^\top \mathbf{F} - m\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}^{(r)}) \ .$$

Ora, l'osservatore mobile misura un'accelerazione $\mathbf{a}^{(r)}$, e supponendo che anch'egli attribuisca a ragioni fisiche la stessa forza $\mathbf{F}$ misurata dall'osservatore fisso, dovrà concludere che esiste una forza apparente dovuta alla rotazione, anche se uniforme, del proprio riferimento. L'equazione che abbiamo appena scritto ci rivela che tale forza è proporzionale a $\omega^2 r$, dove $r = \|\mathbf{x}^{(r)}\|$ è la distanza dall'asse di rotazione, ed è diretta verso l'esterno, perpendicolarmente a tale asse. Ciò si verifica facilmente calcolando la direzione del vettore $-\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}^{(r)})$. Si tratta in effetti della *forza centrifuga* che sperimentiamo abitualmente quando una vettura affronta una curva e che sfruttiamo nelle lavatrici per eliminare l'acqua superflua dal bucato.

Esercizio 5.11: Nel *Dialogo sui due massimi sistemi del mondo* Galileo discute il problema della rotazione della Terra. Simplicio, che difende la teoria aristotelica, obietta che se la terra ruotasse su se stessa la forza centrifuga scaglierebbe via i gravi dalla sua superficie, ma Sagredo controbatte che l'intensità della forza centrifuga è tanto piccola da essere praticamente impercettibile. Calcolare che in conseguenza della rotazione terrestre l'accelerazione di gravità decresce approssimativamente di un fattore 3×10^{-3} passando dal polo all'equatore.

Esercizio 5.12: Sappiamo oggi che il sistema solare si trova alla periferia della nostra Galassia, compiendo una rivoluzione intorno al centro in circa 10^8 anni. Supponendo che la Galassia si comporti come un disco rigido, calcolare l'accelerazione dovuta a questo movimento.

---

[36] Nel caso di oggetti estesi gli effetti della gravità non sono trascurabili. Un esempio particolarmente interessante è quello di satelliti collegati tra loro da un cavo di qualche centinaio di kilometri di lunghezza, che si distende proprio in conseguenza dell'azione della gravità. Questa idea è alla base di un programma spaziale proposto da Giuseppe Colombo.

Risposta: circa $4.6\times10^{-10}\mathrm{m/s^2}$. Questo giustifica il riferimento frequente ad un sistema inerziale come ad un sistema "con assi diretti verso le stelle fisse".

L'effetto più curioso della rotazione è certamente l'accelerazione complementare (o di Coriolis). Osserviamo che questa si manifesta solo per oggetti in movimento nel riferimento mobile. Calcolando la direzione del vettore $\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}^{(r)}$ si vede bene che un punto in movimento subisce un'accelerazione ortogonale alla sua velocità. Ciò spiega il senso di instabilità che si prova quando si tenta di muoversi su una piattaforma rotante (una giostra).

Esempio 5.4: *La rotazione della Terra.* Consideriamo un corpo in movimento sulla superficie terrestre. Un rapido calcolo mostra che esso viene deviato verso destra nell'emisfero nord e verso sinistra nell'emisfero sud. Ciò spiega la circolazione delle correnti atmosferiche, che nell'emisfero nord ruotano in senso antiorario intorno alle aree cicloniche (bassa pressione) ed antiorario intorno alle aree anticicloniche (alta pressione). In effetti, lo spostamento di masse d'aria provocato dalla differenza di pressione tra due regioni è accompagnato da una deviazione verso destra; il moto circolatorio si instaura quando la deviazione dovuta all'accelerazione di Coriolis si equilibra con quella dovuta al gradiente di pressione.

Nel corso dei secoli XVIII e XIX molti fisici hanno cercato di confermare sperimentalmente il moto diurno di rotazione della Terra attorno all'asse polare, cercando appunto di mettere in evidenza l'esistenza di accelerazioni dovuta alle forze apparenti. Buona parte di questi esperimenti avevano proprio lo scopo di mettere in evidenza l'accelerazione di Coriolis. Tra queste si annoverano i tentativi di misurare la deviazione verso oriente nella caduta dei gravi e la rotazione del piano di rotazione del pendolo. Nei prossimi paragrafi svilupperemo un modello teorico dei due esperimenti, ma conviene osservare fin d'ora che la semplictà concettuale del fenomeno non si accompagna ad altrettanta facilità nel rivelarlo. Il lettore interessato potrà trovare una discussione accurata di questi ed altri esperimenti nella memoria di Hagen [23]. Per inciso, fu proprio la scarsa precisione delle misure precedenti a indurre Hagen ad intraprendere una nuova serie di esperienze mediante il suo *isotomeografo*, un apparecchio in grado di mettere in evidenza la rotazione delle Terra sfruttando la conservazione del momento angolare.

5.4.7 La deviazione dei gravi verso oriente

Una prima prova sperimentale della rotazione della terra è fornita dal fatto, già previsto da Galileo,[19] che la traiettoria di un grave che venga lasciato cadere è deviata verso oriente rispetto alla verticale. Tale effetto è dovuto all'accelerazione compementare, e ci proponiamo qui di valutarlo.

In linea di principio l'equazione da considerarsi è la (5.47), che dobbiamo scrivere in un riferimento comodo. Conviene riferirsi ad un sistema di coordinate locali con l'asse $\mathbf{u}_z$ determinato dalla direzione del filo a piombo. Si osservi che questa direzione è determinata dalla somma della forza di gravità e della forza centrifuga $-m\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}^{(r)})$, che possiamo considerare localmente come praticamente costante. Scriveremo dunque l'accelerazione di caduta libera come $-g\mathbf{u}_z$ dove g è l'accelerazione

di gravità misurata localmente. L'equazione di moto completa dovrà includere anche l'accelerazione complementare, e si scriverà (rimuovendo gli apici (r) per semplificare la notazione)

$$\ddot{\mathbf{x}} = -g\mathbf{u}_z - 2\boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\mathbf{x}} \ , \tag{5.48}$$

dove $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità di rotazione della Terra, e precisamente un vettore diretto come l'asse di rotazione terrestre, orientato verso il polo nord, e di modulo[37] $\omega \simeq 7.29 \times 10^{-5}\,\mathrm{sec}^{-1}$. L'equazione (5.48), essendo lineare non omogenea, sarebbe integrabile in modo esatto; vogliamo tuttavia illustrare un metodo di soluzione approssimata, interessante anche per altri problemi. A tal fine si osserva che per velocità iniziali abbastanza piccole il termine di accelerazione complementare sarà piccolo in modulo rispetto a g, ed è comodo ricorrere ad un procedimento di approssimazioni successive che può ben servire come schema di calcolo anche per problemi più complessi. Si tratta in effetti del metodo di sviluppo della soluzione nel piccolo parametro ω.

Cerchiamo una soluzione della forma

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^{(0)}(t) + \mathbf{x}^{(1)}(t) + \mathbf{x}^{(2)}(t) + \ldots$$

dove $\mathbf{x}^{(j)}(t)$ è considerato di ordine ω^j. Sostituendo nell'equazione(5.48) si ha

$$\ddot{\mathbf{x}}^{(0)} + \ddot{\mathbf{x}}^{(1)} + \ddot{\mathbf{x}}^{(2)} + \ldots = -g\mathbf{u}_z - 2\boldsymbol{\omega} \wedge (\dot{\mathbf{x}}^{(0)} + \dot{\mathbf{x}}^{(1)} + \dot{\mathbf{x}}^{(2)} + \ldots) \ ,$$

ed eguagliando separatamente i termini dello stesso ordine in ω si ricava il sistema di infinite equazioni

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}^{(0)} &= -g\mathbf{u}_z \\ \ddot{\mathbf{x}}^{(1)} &= -2\boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\mathbf{x}}^{(0)} \\ \ddot{\mathbf{x}}^{(2)} &= -2\boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\mathbf{x}}^{(1)} \ . \\ &\ldots \end{aligned} \tag{5.49}$$

Questo è un sistema ricorrente, nel senso che ciascuna equazione contiene nel membro di destra solo quantità già calcolate ai passi precedenti, che diventano funzioni note del tempo. Seguiamo in dettaglio i primi passi del procedimento risolutivo.

La prima equazione (di ordine zero) dà il moto dei gravi in caduta libera; se consideriamo il caso di dati iniziali con velocità nulla (un grave sospeso che viene lasciato cadere tagliando il filo) $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $\dot{\mathbf{x}}(0) = 0$ si calcolano il movimento e la velocità come

$$\mathbf{x}^{(0)}(t) = \mathbf{x}_0 - \frac{1}{2}gt^2\mathbf{u}_z \ , \quad \dot{\mathbf{x}}^{(0)}(t) = -gt\mathbf{u}_z \ .$$

Per calcolare l'approssimazione del primo ordine sostituiamo questa soluzione nel membro di destra della seconda equazione, ed otteniamo

$$\ddot{\mathbf{x}}^{(1)} = 2gt\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}_z$$

---

[37] Nel calcolo occorre tener conto che la rotazione completa si compie in un giorno siderale, più breve di circa 1/360 rispetto al giorno solare.

e risolviamola ottenendo

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \frac{gt^3}{3}\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}_z \ , \quad \dot{\mathbf{x}}^{(1)}(t) = gt^2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}_z \ .$$

Se vogliamo un'approssimazione ancora migliore possiamo sostituire questa soluzione nella terza equazione (5.49), ottenendo

$$\ddot{\mathbf{x}}^{(2)} = -2gt^2\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}_z) \ ,$$

e risolvere anche questa ottenendo

$$\mathbf{x}^{(2)} = -\frac{gt^4}{6}\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}_z) \ .$$

Il procedimento potrebbe continuare quanto vogliamo, ma con un attimo di riflessione si vede bene che i contributi degli ordini successivi diventeranno così piccoli da essere in pratica del tutto ininfluenti. Possiamo quindi limitarci a considerare la soluzione approssimata

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 - \frac{1}{2}gt^2\mathbf{u}_z + \frac{gt^3}{3}\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}_z - \frac{gt^4}{6}\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}_z) + \ldots \ .$$

Se ora esaminiamo i termini successivi vediamo che la prima correzione ha come effetto una deviazione della traiettoria di caduta verso oriente. La seconda correzione consiste in una piccolissima deviazione verso sud combinata con una diminuzione altrettanto piccola della velocità di caduta, ma si tratta di un effetto decisamente piccolo.

Per valutare l'entità della deviazione verso oriente si può calcolare

$$\delta \simeq \|\mathbf{x}_1(t)\| = \frac{gt^3}{3}\|\boldsymbol{\omega}\| \cos\lambda \ ,$$

dove λ è la latitudine. Il tempo di caduta può ben valutarsi tenendo conto solo dell'approssimazione di ordine zero — la caduta libera — e si valuta

$$\delta \simeq \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8h^3}{g}}\,\omega \cos\lambda \ .$$

Esercizio 5.13: Si determini la deviazione dalla verticale per un grave che cade da un'altezza di 100 m alla latitudine locale.[38]
Risposta: alla latitudine di Milano (circa 45°) si ha $\delta \simeq 1.6\,\mathrm{cm}$.

---

[38] Il risultato di questo esercizio mette in evidenza quanto sia arduo portare a termine un esperimento in cui si debba misurare una quantità così piccola rispetto all'altezza di caduta: la perturbazione dovuta ai moti dell'aria (che taluni hanno cercato di eliminare installando le loro apparecchiature sperimentali nei pozzi delle miniere), la piccola indeterminazione sulla direzione iniziale di caduta dovuta al meccanismo di sospensione e di rilascio della massa, la difficoltà di determinare con sufficiente precisione il punto di caduta rispetto alla verticale del luogo rendono l'esperimento alquanto problematico. La memoria di Hagen [23], cap. III, contiene un elenco dettagliato di esperienze con una discussione critica.

5.4.8 Il pendolo di Foucault

Una seconda verifica sperimentale della rotazione della terra, consiste nell'osservazione del moto apparente di rotazione del piano di oscillazione di un pendolo. A tal fine occorre considerare il pendolo come un punto materiale che si muove senza attrito sulla superficie di una sfera. È questa la rappresentazione matematica idealizzata di una sfera metallica sospesa ad un filo inestensibile e privo di massa, libera di muoversi mantenendo costante la distanza dal punto di sospensione.

La scrittura delle equazioni di moto partendo dalle equazioni di Newton non è del tutto agevole: vedremo un procedimento alquanto diretto nel capitolo 8, quando faremo uso del formalismo lagrangiano. Qui seguiamo un procedimento riconducibile in buona sostanza all'approssimazione delle piccole oscillazioni che abbiamo trattato nel paragrafo 4.3.5.

Consideriamo un riferimento con origine nel punto di sospensione del pendolo ed asse $\mathbf{u}_z$ nella direzione del filo a piombo, che tiene conto anche della forza centrifuga locale. Nello scrivere le equazioni dovremmo tener conto della forza, o *reazione vincolare*, esercitata sul punto dal filo. Se però assumiamo, come è del tutto ragionevole, che quella forza sia diretta lungo il filo stesso allora il suo momento rispetto al punto di sospensione è nullo. Ciò suggerisce di far ricorso all'equazione per il momento angolare, che non conterrà la reazione vincolare. Scrivendo la forza peso (che nella nostra approssimazione comprende anche la forza centrifuga) come $\mathbf{F} = -mg\mathbf{u}_z$ abbiamo che l'equazione per il momento angolare rispetto all'origine si scrive (si osservi che la massa si semplifica)

$$\mathbf{x} \wedge \ddot{\mathbf{x}} = -g\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}_z - 2\boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\mathbf{x}} \ . \tag{5.50}$$

Supponiamo ora che lo scostamento del pendolo dall'equilibrio sia piccolo (questa è l'approssimazione delle piccole oscillazioni). Allora potremo approssimare la posizione del pendolo scrivendo

$$\mathbf{x} = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y - l\mathbf{u}_z \ ,$$

dove l è la lunghezza del pendolo, e x, $y \ll l$ sono le coordinate nel piano orizzontale. Ciò equivale ad affermare che la coordinata verticale del pendolo resta costante, sicché avremo $z = -l$, $\dot{z} = \ddot{z} = 0$, e dovremo scrivere le equazioni per le sole coordinate x, y. Il membro di sinistra dell'equazione (5.50) diventa

$$\begin{aligned}(x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y - l\mathbf{u}_z)&\wedge(\ddot{x}\mathbf{u}_x + \ddot{y}\mathbf{u}_y)\\ &= x\ddot{y}\mathbf{u}_x \wedge \mathbf{u}_y + y\ddot{x}\mathbf{u}_y \wedge \mathbf{u}_x - l\ddot{x}(\mathbf{u}_z \wedge \mathbf{u}_x) - l\ddot{y}(\mathbf{u}_z \wedge \mathbf{u}_y)\\ &= (x\ddot{y} - y\ddot{x})\mathbf{u}_z - l\ddot{x}\mathbf{u}_y + l\ddot{y}\mathbf{u}_x \ .\end{aligned}$$

Nel secondo membro della (5.50) sostituiamo $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{u}_x+\omega_y\mathbf{u}_y+\omega_z\mathbf{u}_z$ e, coerentemente con le nostre approssimazioni, $\mathbf{x} = \dot{x}\mathbf{u}_x + \dot{y}\mathbf{u}_y$. Con un calcolo analogo a quello appena svolto abbiamo

$$\begin{aligned}-g(x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y - l\mathbf{u}_z) \wedge \mathbf{u}_z &- 2(\omega_x\mathbf{u}_x + \omega_y\mathbf{u}_y + \omega_z\mathbf{u}_z) \wedge (\dot{x}\mathbf{u}_x + \dot{y}\mathbf{u}_y)\\ &= gx\mathbf{u}_y - gy\mathbf{u}_x - 2(\omega_x\dot{y} - \omega_y\dot{x})\mathbf{u}_z - 2\omega_z\dot{x}\mathbf{u}_y + 2\omega_z\dot{y}\mathbf{u}_x \ .\end{aligned}$$

Si noti che la sola componente di $\boldsymbol{\omega}$ rilevante in questo calcolo è la proiezione su $\mathbf{u}_z$, ossia $\omega_z = \|\omega\| \sin\lambda$, dove λ è la latitudine. Ora, avendo approssimato il moto come piano, trascuriamo le componenti lungo $\mathbf{u}_z$ ed eguagliamo le componenti lungo i versori $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$. Otteniamo così le equazioni

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x + 2\omega_z\dot{y} \ , \quad \ddot{y} = l\frac{g}{l}y - 2\omega_z\dot{x} \ . \tag{5.51}$$

Queste sono le equazioni che descrivono il moto del pendolo nell'approssimazione lineare.

Se la Terra non fosse soggetta alla rotazione diurna avremmo $\boldsymbol{\omega} = 0$, e quindi a maggior ragione $\omega_z = 0$, e le equazioni si ridurrebbero a quelle di due oscillatori indipendenti. Questo accade comunque all'equatore, dove si ha $\omega_z = 0$. In tal caso si possono dare condizioni iniziali tali che il moto del pendolo resti piano; ad esempio condizioni tipo $y(0) = \dot{y}(0) = 0$, oppure $x(0) = y(0) = 0$ con qualunque scelta delle velocità iniziali, o ancora $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ con qualunque scelta degli spostamenti iniziali, &c.

Se $\omega_z \neq 0$ allora dobbiamo risolvere un sistema di equazioni lineari a coefficienti costanti, cosa che possiamo ben fare seguendo il procedimento generale discusso nel capitolo 3. Tuttavia possiamo semplificare sensibilmente il calcolo ricorrendo alla rappresentazione complessa. Denotiamo $\zeta = x + iy$, sicché avremo $\dot{\zeta} = \dot{x} + i\dot{y}$ e $\ddot{\zeta} = \ddot{x} + i\ddot{y}$. Vediamo allora che possiamo scrivere l'equazione(5.51) come

$$\ddot{\zeta} = -\frac{g}{l}\zeta - i2\omega_z\dot{\zeta} \ , \tag{5.52}$$

che è ancora un'equazione lineare, ma più semplice della precedente. Risolvendo l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + i2\omega_z + \frac{g}{l} = 0$$

troviamo le radici

$$\lambda = -i\omega_z \pm i\nu \ , \quad \nu = \sqrt{\frac{g}{l} + \omega_z^2} \ .$$

Pertanto la soluzione generale della (5.52) avrà la forma

$$\zeta(t) = ae^{i(-\omega_z+\nu)t} + be^{i(-\omega_z-\nu)t}$$

con a, b costanti complesse da determinarsi mediante i dati iniziali. Un caso interessante si ha imponendo al tempo $t = 0$ le condizioni

$$\zeta(0) = \zeta_0 \ , \quad \dot{\zeta}(0) = 0 \ ,$$

il che corrisponde a spostare il pendolo dall'equilibrio di ζ_0 e lasciarlo andare: un metodo tipico per dare inizio al movimento.[39] In tal caso, con qualche calcolo, si trova che la soluzione può scriversi

$$\zeta(t) = \zeta_0 e^{-i\omega_z t}\left(\cos\nu t - i\frac{\omega_z}{\nu}\sin\nu t\right) \ .$$

---

[39] Nell'esperimento di Foucault, di cui diremo tra poco, il pendolo veniva mantenuto nella posizione iniziale da una cordicella che veniva bruciata per dar inizio all'esperimento.

Poiché $\omega_z \ll 1$ la traiettoria del pendolo può descriversi come un'ellisse molto schiacciata, difficilmente distinguibile a occhio da un segmento, che ruota con velocità angolare $-\omega_z$, molto lenta, in verso opposto a quello di rotazione della Terra.[40] Ad esempio, ai poli la rotazione si completerebbe in un pariodo τ pari al giorno siderale (di poco più breve di un giorno solare). Al diminuire della latitudine λ il periodo diventa $\tau/\sin\lambda$, tendendo all'infinito all'equatore ove il fenomeno non si verifica.

La prova sperimentale della rotazione della Terra con questo metodo è merito di Léon Foucault, che la tentò in più riprese intorno al 1851, con pendoli di lunghezza crescente. Il primo esperimento fu eseguito con una lunghezza di 2 m e con ampiezze di oscillazione tra 15° e 20°; il secondo con una lunghezza di 11 m. Questi servirono in pratica solo a mettere in evidenza in modo qualitativo l'esistenza della rotazione.[16][17] La prova più celebre fu eseguita in pubblico nel Pantheon di Parigi con un pendolo di 67 m di lunghezza ed ampiezze di oscillazione inferiori a 3°. I dettagli tecnici di questa esperienza sono riportati nella breve nota [18], apparentemente non pubblicata dall'autore ma trovata tra i suoi manoscritti ed inclusa tra le sue opere.[41]

---

[40] Nei testi di fisica non è raro trovare l'argomento seguente: se ci trovassimo al polo nord, allora il pendolo, spostato dal suo equilibrio e lasciato libero di oscillare, percorrerebbe una traiettoria che lo porta a ripassare per l'equilibrio ad ogni oscillazione, ed il suo movimento sarebbe piano rispetto al riferimento assoluto. Rispetto alla Terra però, che sta girando intorno al suo asse, si osserverebbe un moto lento di precessione che fa ruotare il piano di oscillazione di un intero angolo giro in un giorno sidereo. Questo, del resto, è l'argomento usato dallo stesso Foucault nella sua prima memoria [16]. Alla luce del calcolo che abbiamo svolto si vede che l'affermazione non è del tutto corretta. Esiste, in effetti, la possibilità di assegnare condizioni iniziali che fanno oscillare il pendolo in un piano soggetto a precessione lenta, ma non sono quelle descritte: occorre imprimere una piccolissima velocità trasversale, che il lettore potrà calcolare facilmente. Va da sé che realizzare concretamente tali condizioni iniziali è praticamente impossibile.

[41] Si deve osservare che l'esperimento presenta alcune difficoltà ovvie dovute alle perturbazioni indotte dai movimenti dell'aria, che possono minimizzarsi lavorando in ambienti chiusi, e soprattutto all'attrito che smorza le oscillazioni. L'aumento della lunghezza permette di allungare il periodo di oscillazione, e la sensibilità all'attrito dell'aria può essere diminuita aumentando la massa del pendolo: nell'esperimento al Pantheon Foucault usò una massa di 28 Kg, riuscendo in tal modo a mantenere le oscillazioni per cinque o sei ore. C'è però una difficoltà nascosta ma non per questo meno perniciosa. Anzitutto, come abbiamo già osservato, il pendolo si muove su un'ellisse molto schiacciata, ed è praticamente impossibile dargli dati iniziali tali che il moto sia realmente piano. In queste condizioni la traiettoria ellittica è soggetta ad un movimento proprio di precessione che non è dovuto alla forza apparente. Ciò non risulta dalle equazioni che abbiamo scritto perché abbiamo mantenuto l'approssimazione del moto armonico. La precessione è dovuta alla non linearità del sistema: metteremo in evidenza questo fatto nella discussione sul moto centrale, nel paragrafo 8.1.4. Ciò introduce degli errori sistematici nella misura, particolarmente evidenti a grandi ampiezze di oscillazione.